10 класс

11 класс

Учимся разумному финансовому поведению

твой А+ктив

Григорий Канторович

Финансовая грамотность

Математический профиль

Сетевая академия

ДОПОЛНИТЕЛЬНОЕ ОБРАЗОВАНИЕ

ИЗДАНИЕ ПОДГОТОВЛЕНО В РАМКАХ СОВМЕСТНОГО ПРОЕКТА МИНИСТЕРСТВА ФИНАНСОВ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ И ВСЕМИРНОГО БАНКА «СОДЕЙСТВИЕ ПОВЫШЕНИЮ УРОВНЯ ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ НАСЕЛЕНИЯ И РАЗВИТИЮ ФИНАНСОВОГО ОБРАЗОВАНИЯ В РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ»

10 класс 11 класс

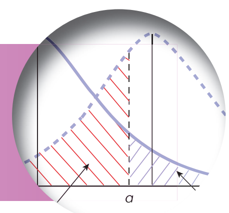
Учимся разумному финансовому поведению

ТВОЙ А+КТИВ

ГРИГОРИЙ КАНТОРОВИЧ

ФИНАНСОВАЯ ГРАМОТНОСТЬ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРОФИЛЬ



МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ УЧАЩИХСЯ

ИННОВАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ УЧЕБНЫХ ЗАНЯТИЙ ПО ФИНАНСОВОЙ ГРАМОТНОСТИ В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ОРГАНИЗАЦИЯХ (СРЕДНЕЕ ОБЩЕЕ ОБРАЗОВАНИЕ)

ЭЛЕКТРОННАЯ ВЕРСИЯ

СЕТЕВАЯ АКАДЕМИЯ

МОСКВА

УДК 373.167.1:336+336 (075.3)
ББК 65.26я721-6
К19

Проект «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в Российской Федерации»

Электронная версия - НОЧУ ДПО УЦ «Сетевая Академия»

«Финансовая грамотность» — целостная система учебных курсов для дополнительного образования обучающихся, впервые разработанная в России. Для каждого курса создан учебно-методический комплект, включающий материалы для обучающихся, учебную программу, методические рекомендации для педагога, контрольные измерительные материалы и материалы для родителей.

Учебные материалы содержат значительный объём информации, что позволяет использовать их не только в учебном процессе, но и во внеурочной деятельности — для самообразования обучающихся, реализации их индивидуальной образовательной траектории, совместной работы с родителями и др.

Автор: *Григорий Канторович,*
кандидат физико-математических наук, профессор НИУ ВШЭ

Канторович, Г. Г.

К19 Финансовая грамотность: материалы для учащихся. 10–11 классы общеобразоват. орг. Математический профиль / Г. Г. Канторович. – М.: НОЧУ ДПО УЦ «Сетевая Академия», 2018. – 96 с. (Дополнительное образование: Серия «Учимся разумному финансовому поведению»).

ISBN 0000000

В пособии содержится математическое описание традиционных для дисциплин по финансовой грамотности вопросов: простых и сложных процентов, учёта разновременных финансовых потоков, расчёта цены финансовых инструментов и оценки инвестиционных проектов. Значительное место отводится примерам решения задач. Для описания и оценки рисков, связанных с финансовыми операциями, активно используются понятия теории вероятностей и математической статистики. Материалы носят избыточный характер и предполагают возможность школьника самостоятельно освоить разделы, касающиеся теории вероятностей и статистики.

УДК 373.167.1:336+336 (075.3)
ББК 65.26я721-6

ISBN 0000000

СОДЕРЖАНИЕ

Занятие 1 Простые (арифметические) проценты по вкладу. Сложные проценты по вкладу 8

Занятие 2 Сложно-простые проценты. Экономический смысл числа *e* 13

Занятие 3 Темп прироста вклада при начислении сложно-простых процентов 17

Занятие 4 Сравнение денежных сумм в разные моменты времени.Дисконтирование. Анализ инвестиционных проектов 21

Занятие 5 Ипотечный кредит 25

Занятие 6 Ценные бумаги. Бесконупонные облигации 29

Занятие 7 Купонные облигации 33

Занятие 8 Типы ценных бумаг: акции 37

Занятие 9 Стоимость акции. Доходность акции 41

Занятие 10 Риски финансовых решений.
Описание риска в понятиях теории вероятностей 45

Занятие 11 Основные понятия теории вероятностей
и математической статистики: случайные события 49

Занятие 12 Условная вероятность. Случайные величины 52

Занятие 13 Непрерывные случайные величины 54

Занятие 14 Совместное распределение
нескольких случайных величин.
Условное распределение случайной величины 58

Занятие 15 Характеристики распределения случайной величины —
математическое ожидание и дисперсия.
Свойства математического ожидания 62

Занятие 16 Характеристика совместного распределения
случайных величин — ковариация
и коэффициент корреляции 65

Занятие 17 Основные понятия математической статистики 67

Занятие 18 Свойства статистических оценок 71

Занятия 19—20 Статистические выводы 74

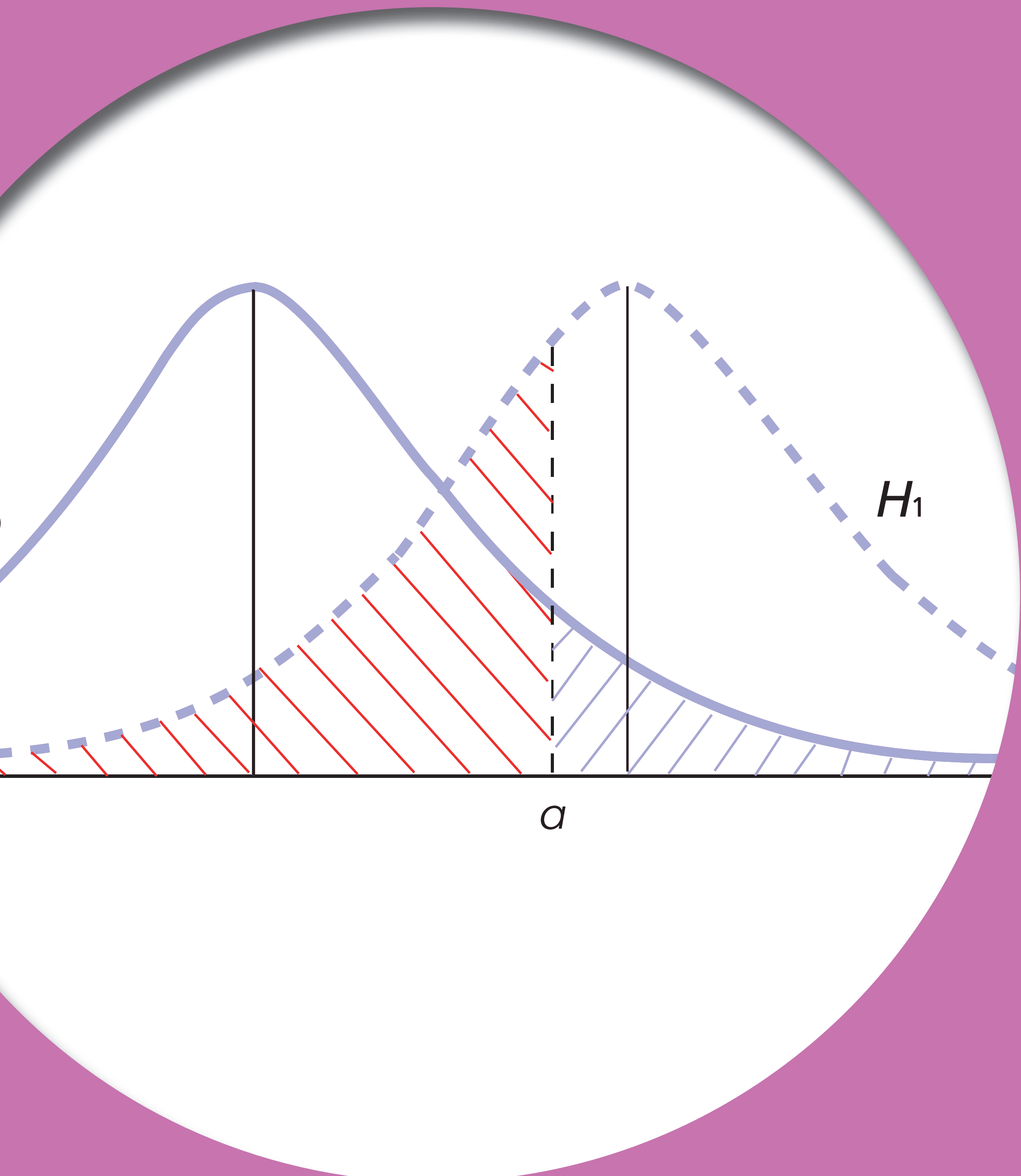
Занятия 21—22 Распределения, связанные с нормальным распределением 79

Занятие 23 Проверка гипотез, базирующихся на нормальном распределении 83

Занятие 24 Доверительные интервалы 85

Занятие 25 Измерение риска и доходности ценной бумаги на финансовых рынках 87

Занятие 26 Портфельный риск 93


H_1
a

занятия 1-26

ЗАНЯТИЕ 1

- ПРОСТЫЕ (АРИФМЕТИЧЕСКИЕ) ПРОЦЕНТЫ ПО ВКЛАДУ
- СЛОЖНЫЕ ПРОЦЕНТЫ ПО ВКЛАДУ

Когда у человека есть деньги, которые он не собирается тут же тратить на покупки (в терминах экономики — потреблять), возникает вопрос, как с ними разумно поступить. Один из наиболее простых и известных способов — это положить деньги в банк. Получая деньги в пользование, банк обязуется их вернуть и оплатить клиенту уступленное право пользования (процент). Условия возвращения депозита (так называют вложенную в банк сумму денег) и оплаты процента указываются в договоре с банком. Для клиента очень важно суметь правильно понять условия договора и провести правильные расчёты будущих финансовых потоков. В принципе договор может быть любым, лишь бы и банк, и клиент с ним были согласны. Но на практике в основном действуют стандартизованные типы договоров. Начнём с договора с простыми процентами.

Простые (арифметические) проценты по вкладу

Пусть некий человек, назовём его экономическим агентом или вкладчиком, кладёт на счёт в банке V денежных единиц, например 1000 р.

По условиям договора банк обязуется ежегодно выплачивать вкладчику фиксированную долю вклада. Чаще всего эта доля выражена в процентах и называется процентом по депозиту (вкладу). Обозначим этот показатель через r. Обозначение связано с английским термином *interest rate*. В конце первого года хранения денег в банке вкладчик получит доход $\frac{Vr}{100}$ единиц. Для того чтобы формулы были менее громоздкими, процент по вкладу удобнее выражать в долях. Например, в процентах — 5%, а в долях — 0,05. Если выражать процент по вкладу в долях, то в конце года вкладчик получит Vr денежных единиц.

Если вкладчик забирает проценты, а вклад остаётся в банке, то в конце следующего года вкладчик получит ещё Vr денежных единиц. Другими словами, за два года вкладчик получит $2Vr$ единиц. Аналогично за t лет вкладчик получит Vrt денежных единиц.

Вкладчик может не забирать накопившиеся к концу года проценты, а добавлять эту сумму к основному вкладу. Договор с простыми процентами характеризуется тем, что проценты на проценты **не** начисляются. Условия договора по начислению процентов распространяются только на основной вклад. В этом случае к концу года t вклад будет составлять

$$V_t = V(1 + rt)$$

денежных единиц. Для целочисленного положительного (натурального) t величина вклада представляет собой арифметическую прогрессию с разностью Vr. Индекс t подчёркивает, что мы рассматриваем величину вклада как функцию времени (числа лет), а первоначальный размер вклада V и ставка процента r рассматриваются как параметры. Формула ясно указывает, что при начислении простого процента размер вклада растёт как линейная функция времени.

Заметим, что величина накопленного вклада будет такой же в конце периода, если процент по вкладу уменьшить в 2 раза, но подождать вдвое больше времени. Геометрическое место точек плоскости (r, t) таких, что значение функции V_t сохраняется постоянным, называется *линией уровня* этой функции (рис. 1). Уравнение этой линии для вклада с простым начислением процентов имеет вид: $V(1 + rt) = const$. При заданном начальном вкладе эта линия — ветвь гиперболы $rt = k$, лежащая в первом квадранте (по горизонтальной оси отложено время, по вертикальной — доля). При построении графика время рассматривается как непрерывное, хотя доход выплачивается только в конце каждого года.

Если вкладчик планирует держать деньги в банке несколько лет, то начисление простых процентов явно невыгодно для него. Вкладчик быстро сообразит, что ему выгоднее забрать вклад и проценты в конце года и тут же вложить увеличенную за счёт процентов сумму денег ещё на один год, через год повторить эту операцию, и так каждый год. При такой стратегии ежегодные проценты будут начисляться на всю накопленную сумму, а не только на первоначальный вклад.

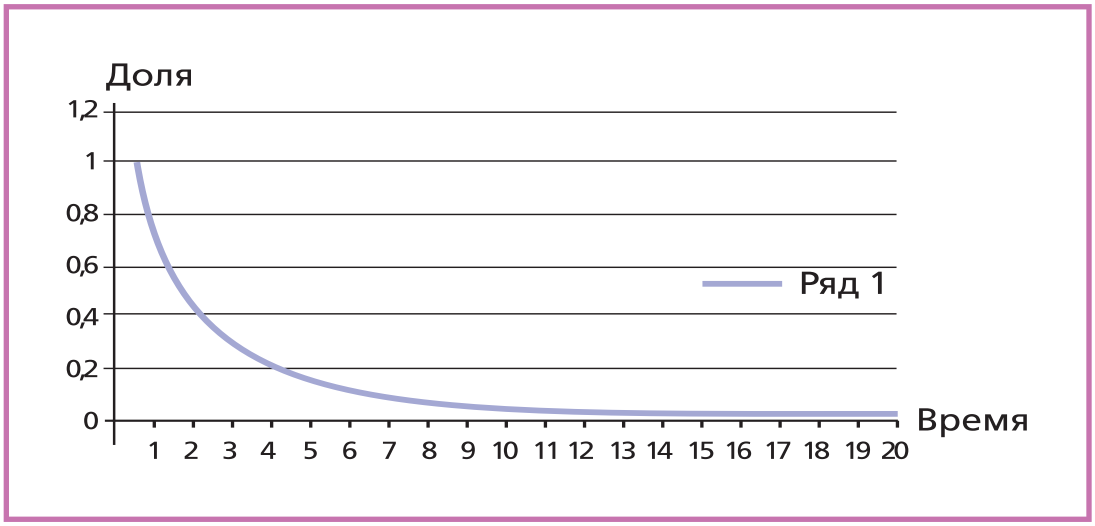


Рис. 1. **Линия уровня при начислении простых процентов**

Сложные проценты по вкладу

Для того чтобы избежать бессмысленных операций ежегодного закрытия вклада и открытия его вновь, банк предлагает клиентам схему начисления сложных процентов. Начисление сложных процентов эквивалентно тому, что срок размещения вклада всегда составляет только один год, но первоначальная сумма ежегодно растёт за счёт начисленных в предыдущем году процентов. После первого года вклад составит, как и при простых процентах, $V_1 = V(1 + r)$. После второго года — $V_2 = V(1 + r)^2$. Аналогично к концу года t вклад будет составлять $V_t = V(1 + r)^t$.

При начислении сложных процентов величина вклада увеличивается по формуле геометрической прогрессии с показателем $(1 + r)$. Теперь величина вклада растёт не как линейная, а как показательная функция. На рис. 2 показано, как растёт вклад при начислении дохода по формуле простых и сложных процентов. По горизонтальной оси отложено время, а по вертикальной — размер вклада. Начальный вклад полагается равным одной денежной единице. Обратите внимание, что при малом сроке хранения вклада величина депозита незначительно различается для двух разных способов начисления процентов. При сроке хранения вклада в несколько десятков лет разница становится очень большой.

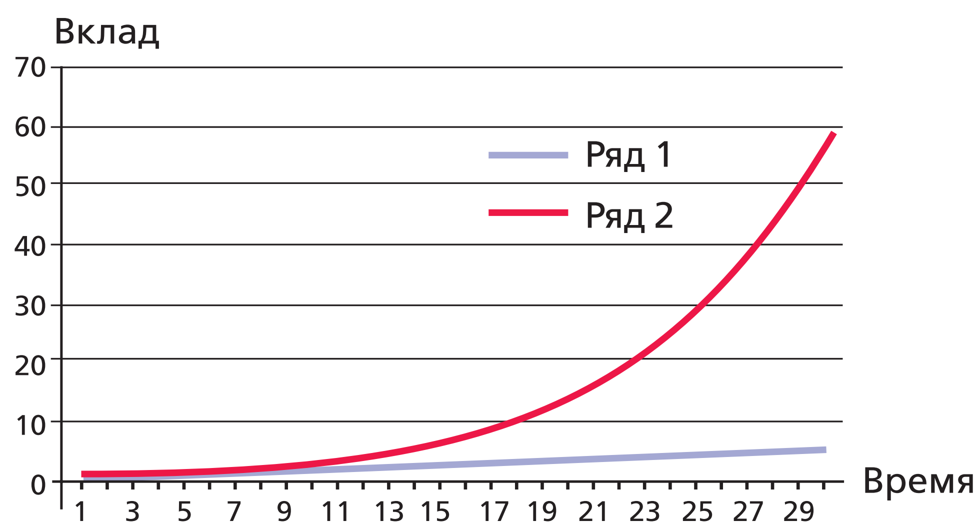


Рис. 2. **Рост вклада по формулам простых и сложных процентов**

Линия уровня стоимости вклада при начислении сложного процента имеет вид: $t \cdot \ln(1 + r) = const$ (по горизонтальной оси отложено время, по вертикальной — доля) (рис. 3).

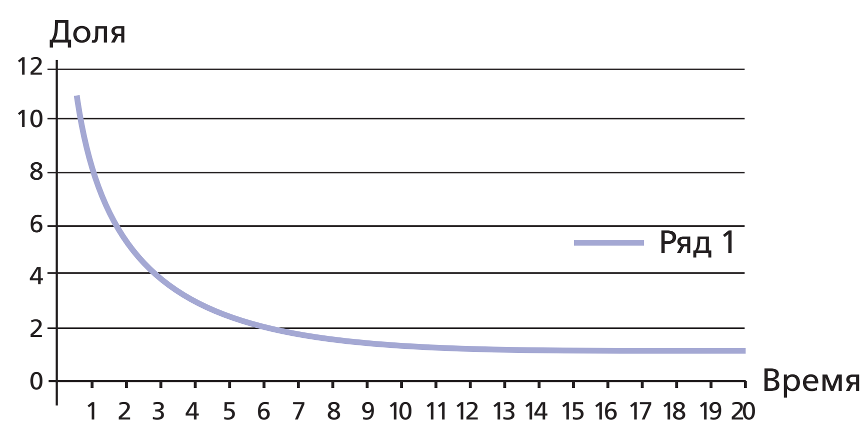


Рис. 3. **Линия уровня стоимости вклада при начислении сложного процента**

Применим выведенные формулы для решения следующей задачи.

Папа первоклассницы Тани решил накопить денег на выпускной вечер дочери. Он положил 1000 р. на счёт в банке под годовой номинальный процент 10%. Найдите сумму, которая накопится на вкладе к окончанию Таней средней школы, если проценты начисляются ежегодно:

а) по формуле простых процентов;

б) по схеме сложных процентов.

Решение. Применение формулы простых процентов даёт $1000 \cdot (1 + 0{,}1 \cdot 11)$ р. через 11 лет. В итоге в пункте а) папа накопит к Таниному выпускному вечеру 2100 р.

При ежегодном начислении сложных процентов к выпускному вечеру будет накоплено $1000 \cdot (1 + 0{,}1)^{11} = 2853$ р. 12 к. Накопленная сумма будет примерно в 1,4 раза больше, чем при начислении простых процентов.

ЗАНЯТИЕ 2

- СЛОЖНО-ПРОСТЫЕ ПРОЦЕНТЫ
- ЭКОНОМИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЧИСЛА *e*

Сложно-простые проценты

Существует ещё одна схема начисления процентов на вклад, иногда называемая сложно-простыми процентами. При этой схеме устанавливается годовая ставка процента r, но начисление процентов проводится несколько раз в год. Например, начисление может проводиться ежеквартально или ежемесячно. Обозначим количество раз начисления процентов в течение года через натуральное число m. Тогда в конце первого периода начисления вклад увеличивается до величины $V(1 + \frac{r}{m})$. Другими словами, при увеличении вклада в конце каждого периода используется формула простого процента. Но в следующий период процент начисляется уже с учётом увеличения вклада, т. е. «работает» формула сложного процента. Поэтому к концу года вклад станет равен величине $V(1 + \frac{r}{m})^m$. К концу года t вклад будет составлять величину

$$V_t = V(1 + \frac{r}{m})^{mt}.$$

Параметр m входит в эту формулу дважды. При его увеличении уменьшается выражение, заключённое в скобки, но увеличивается показатель степени, в которую выражение в скобках возводится. Можно доказать (см. упражнения), что при постоянных величинах r и t выражение $V_t = V(1 + \frac{r}{m})^{mt}$ монотонно растёт при увеличении m. При одном и том же годовом проценте чем чаще происходит начисление, тем больше величина вклада к концу года.

Рассмотрим не очень жизненный, но математически легко понимаемый пример. Пусть вкладчик кладёт в банк 1 р., но под 100% годовых. Рассчитаем размер вклада через один год. В зависимости от переменной m размер вклада составит величину, представленную в таблице 1. В первом столбце указано количество начислений в течение года. Первая строка соответствует ежегодному начислению процента, 12-я — ежемесячному начислению, 52-я — еженедельному. Второй столбец показывает величину вклада в конце года, а третий — процент, при котором однократное начисление могло бы дать такую же величину вклада. Этот показатель принято называть *эффективным процентом*, а годовой процент r — *номинальным процентом*. Мы видим, что при еженедельном начислении ($m = 52$) номинальному проценту 100% соответствует эффективный процент более 169%. При ежедневном начислении ($m = 365$) эффективный процент достигает почти 171,5%. Дальнейшее увеличение числа m практически не меняет эффективный процент.

Таблица 1. **ВЕЛИЧИНА ВКЛАДА В КОНЦЕ ГОДА И ЭФФЕКТИВНЫЙ ПРОЦЕНТ ПРИ РАЗНОМ КОЛИЧЕСТВЕ НАЧИСЛЕНИЙ ПРОЦЕНТА В ТЕЧЕНИЕ ГОДА**

Количество начислений в году (*m*)	**Величина вклада в конце года**	**Эффективный процент**
1	2	100
2	2,25	125
3	2,37037037	137,037037
4	2,44140625	144,140625
5	2,48832	148,832
6	2,521626372	152,1626372
7	2,546499697	154,6499697
8	2,565784514	156,5784514
9	2,581174792	158,1174792

Продолжение

Количество начислений в году (m)	**Величина вклада в конце года**	**Эффективный процент**
10	2,59374246	159,374246
11	2,604199012	160,4199012
12	2,61303529	161,303529
…	…	…
52	2,692596954	169,2596954
…	…	…
365	2,714567482	171,4567482
…	…	…
1000	2,716923932	171,6923932
…	…	…
1 000 000	2,718280469	171,8280469
10 000 000 000	2,718282053	171,8282053

Из таблицы видно, что при увеличении количества начислений величина вклада в конце года действительно монотонно растёт. Можно доказать этот вывод строго математически, используя разложение степени по формуле бинома Ньютона. Но растёт вклад не безгранично, при больших значениях параметра m его дальнейшее увеличение почти не меняет величину вклада в конце года. На языке математики это означает, что существует предел выражения $V_m = V(1 + \frac{1}{m})^m$, который соответствует бесконечно частому начислению процента. Конечно, на практике такое невозможно, бесконечно частое начисление процента существует только абстрактно. Такой контракт с банком называется *мгновенно начисляемым* сложным процентом. Используя математическое определение предела, можно утверждать, что существует $\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$, и этот предел и есть величина вклада в 1 р. в конце года хранения при мгновенном начислении сложных процентов и годовом номинальном проценте 100%.

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

Экономический смысл числа *e*

Величина рассмотренного выше предела обозначается знакомым вам иррациональным числом, являющимся основанием натуральных логарифмов, — числом *e*. Его примерная величина равна 2,7182. Напомним, что это иррациональное число не может быть выражено ни в виде простой дроби, ни в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Итак,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Мы получили следующее экономическое содержание числа *e*.

Основание натуральных логарифмов соответствует величине вклада в 1 р. после одного года хранения при мгновенном начислении сложных процентов и годовом номинальном проценте 100%. В конце года *t* накопленный размер вклада составит

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{nt} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^t = e^t.$$

ЗАНЯТИЕ 3

ТЕМП ПРИРОСТА ВКЛАДА ПРИ НАЧИСЛЕНИИ СЛОЖНО-ПРОСТЫХ ПРОЦЕНТОВ

Полученная выше формула легко обобщается на случай произвольного начального вклада и произвольного времени его хранения. При этом не обязательно рассматривать целое число лет. При начальном вкладе V_0, номинальном годовом проценте r через время t вклад составит величину V_0e^{rt}.

Для характеристики динамичности величины вклада часто используют темп прироста вклада, т. е. отношение прироста вклада за период к величине вклада в начале периода. При увеличении величины вклада по формуле простых процентов темп его прироста в году t рассчитывается по формуле

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{V_t-V_{t-1}}{V_{t-1}}=\frac{V_0(1+rt)-V_0(1+r(t-1))}{V_0(1+r(t-1))}=\frac{1}{1+r(t-1)}.$$

С каждым последующим годом вклад растёт всё с меньшим темпом прироста.

При однократном начислении сложных процентов отношение прироста вклада за год к его величине в начале года равно

$$\frac{\Delta V}{V}=\frac{V_t-V_{t-1}}{V_{t-1}}=\frac{V_{t-1}(1+r)-V_{t-1}}{V_{t-1}}=r.$$

Мы видим, что в этом случае темп прироста вклада не зависит от срока хранения. Другими словами, вклад растёт с постоянным темпом, равным годовому проценту r, выраженному в долях. Начисление сложных процентов m раз в течение года делает выражение для расчёта темпа прироста более громоздким. Подставив выражения для величины вклада, получим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_t - V_{t-1}}{V_{t-1}} = \frac{V_{t-1}(1+\frac{r}{m})^m - V_{t-1}}{V_{t-1}} = (1+\frac{r}{m})^m - 1.$$

И в этом случае вклад прирастает с постоянным темпом, но темп прироста выше, чем при однократном начислении сложных процентов.

При мгновенном начислении процента темп роста стоимости вклада также постоянен и равен предельному значению $e^r - 1$. Обратите внимание, что темп прироста величины вклада совпадает с эффективным процентом, который мы рассмотрели чуть раньше.

Продолжим задачу о накоплении денег на выпускной вечер, которую мы решили на занятии 1. Для удобства чтения повторим её условие, но зададим другие условия начисления процентов.

Папа первоклассницы Тани решил накопить денег на выпускной вечер дочери. Он положил на счёт в банке 1000 р. под годовой номинальный процент 10%. Какая сумма накопится на вкладе к окончанию Таней средней школы, если проценты начисляются ежемесячно по схеме сложных процентов?

Решение. При ежемесячном начислении процентов накопленная сумма составит $1000 \cdot (1 + \frac{0{,}1}{12})^{11 \cdot 12}$ = 2990 р. 50 к.

Рассмотрим несколько более сложный пример.

Родители одноклассников Тани (см. предыдущий пример) решили последовать примеру Таниного папы, но поскольку финансовое положение в семьях было разным, не все открыли вклады одновременно. Из 40 учеников класса ежегодно открывали вклад по 4 семьи. Все они, как договорились, размещали на депозите в банке по 1000 р. Какая сумма соберётся у всех вместе к окончанию средней школы, если проценты начисляются ежегодно по схеме сложных процентов?

Решение. К концу школы у 4 семей, открывших счёт сразу, накопится к концу школы $4000 \cdot (1 + 0{,}1)^{10}$ р. У четвёрки семей, открывших вклады на год позже, накопится к концу школы $4000 \cdot (1 + 0{,}1)^9$ р. Отметим, что эта сумма меньше предыдущей в 1,1 раза. Суммарный вклад 4 семей, открывших счёт ещё на год позже, будет меньше в 1,1 раза, чем у семей, открывших вклад на год раньше. Каждый год задержки с от-

14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

крытием вклада приводит к уменьшению накопленной суммы в 1,1 раза. Следовательно, суммы, накопленные четвёрками семей с разным временем открытия вклада, образуют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $\frac{1}{1{,}1}$. Сумма 10 членов геометрической прогрессии будет равна

$$\frac{4000\cdot(1+0{,}1)^{10}\left(1-\left(\frac{1}{1{,}1}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{1{,}1}}=\frac{4000\cdot((1{,}1)^{10}-1)}{0{,}090909}=114\,124{,}67\text{ р.}$$

Докажем утверждение, сделанное при изложении материала этого занятия. С математической точки зрения это задача повышенной трудности.

Задача. Докажите, что при увеличении числа начислений внутри года накопленный к концу года вклад монотонно возрастает.

Доказательство. Рассмотрим последовательность

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

По формуле бинома Ньютона

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+n\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3}+\ldots+$$

$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots k}\cdot\frac{1}{n^k}+\ldots+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\cdot\frac{1}{n^n}=$$

$$=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+$$

$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Формула для x_{n+1} содержит на одно слагаемое больше, чем формула для x_n. Все слагаемые в формулах являются положительными числами.

Кроме того, $\left(1-\frac{s}{n}\right)<\left(1-\frac{s}{n+1}\right)$ для всех $s=1, 2, \ldots, n-1$.

Поэтому $x_n<x_{n+1}$ для всех $n=1, 2, \ldots$ Это и означает, что последовательность является монотонно возрастающей.

Рассмотрим ещё одну задачу повышенной трудности, связанную с накоплением по формуле смешанных процентов.

Задача. Докажите, что при неограниченном увеличении числа n последовательность x_n не превышает числа 3.

Доказательство. Используем выражение из предыдущей задачи. Заметим, что каждый из сомножителей вида $\left(1-\frac{s}{n}\right)<1$. Также для всех $n = 1, 2, \ldots$ справедливо очевидное неравенство $\frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}$. Тогда $x_n < 2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}<2+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}$. Сумма убывающей геометрической прогрессии с положительными членами не превышает суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии с тем же показателем 0,5. Для нашей бесконечно убывающей прогрессии сумма её членов равна единице. Из этих двух задач следует оценка основания натуральных логарифмов: $2 < e < 3$.

Применение постоянной номинальной ставки процента при расчёте величины вклада в длительном периоде выглядит не очень обоснованным и соответствующим практике. Обычно банк устанавливает процентную ставку на какой-то определённый период, а по его истечении устанавливает другую ставку. Поэтому формула для расчёта величины вклада при переменном проценте меняется. Принцип расчёта в этом случае прост и логичен. Рассчитываем размер вклада к концу срока постоянной ставки процента и рассматриваем накопленную величину как начальный вклад для новых условий хранения. И т. д. Например, пусть для периода в t лет установлена номинальная ставка r с начислением процентов m раз в год, а для следующих s лет установлена номинальная ставка q с начислением процентов l раз в год. Тогда к концу этого двухпериодного срока начальный вклад V достигнет следующей величины:

$$V_{t+s}=V\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}\left(1+\frac{q}{l}\right)^{ls}.$$

Отметим, что в начальный момент условия начисления процентов для последующих периодов неизвестны. Поэтому величина вклада в долгосрочном периоде становится неопределённой. Это требует особых приёмов для выработки решения в условиях неопределённости. Мы рассмотрим эту ситуацию позже.

ЗАНЯТИЕ 4

- СРАВНЕНИЕ ДЕНЕЖНЫХ СУММ В РАЗНЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ. ДИСКОНТИРОВАНИЕ
- АНАЛИЗ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

Сравнение денежных сумм в разные моменты времени. Дисконтирование

Рост величины депозита показывает, что сегодняшняя сумма денег эквивалентна большей величине в будущем. Ведь деньги можно положить в банк под проценты, что увеличит размер вклада в будущем. Поэтому, чтобы сравнивать объёмы денег в различные моменты времени, нужно привести их к сопоставимой величине. Обычно приводят деньги к сегодняшнему моменту времени, и эта величина называется *текущей стоимостью* денег. Общепринятое обозначение *PV*, от английского термина *present value*. Пусть деньги в размере *PV* положены в банк на депозит при номинальном годовом проценте r (в долях). Тогда при однократном ежегодном начислении процентов через t лет эта сумма превратится в величину $PV(1 + r)^t$. Эту величину называют будущей стоимостью и часто обозначают как FV_t. Обозначение связано с английским *future value*. Поэтому сумма денег в конце года t имеет сегодняшнюю стоимость $PV = \frac{FV_t}{(1+r)^t}$.

При вычислении текущей стоимости денег возникают две сложности. Первая сложность: какую ставку процента использовать? Ведь мы знаем, что различные банки предлагают разные условия депозита. Вторая сложность: деньги можно положить на депозит не только на целое число лет, поэтому нужно уметь вычислять текущую стоимость денег для произвольного числа лет t. Величину параметра r, которую применяют для расчёта текущей стоимости денег, называют годовой *ставкой дисконтирования.* Сама текущая стоимость денег может также называться дисконтированной величиной будущего денежного потока. Если в течение ряда лет экономический агент ожидает получить денежные потоки C_t в конце года t, то текущая стоимость этого потока доходов выражается простой формулой

$$PV = \sum \frac{C_t}{(1+r)^t}.$$

Суммирование распространяется на все годы.

Если же потоки денег могут поступать экономическому агенту не только в конце года, а в произвольные моменты времени, то для приведения потока денег к текущей стоимости применяется формула, аналогичная мгновенному начислению процента. Поскольку $FV_t = PVe^{rt}$, то текущая стоимость равна $PV = FV_t e^{-rt}$. В этом случае r естественно называть *мгновенной ставкой дисконтирования*. Она показывает скорость убывания текущей стоимости со временем. Для вычисления текущей стоимости потока доходов за период T суммирование заменяется интегрированием, и формула расчёта текущей стоимости принимает вид

$$PV = \int_0^T FV_t e^{-rt} dt.$$

Заметим, что при расчёте текущей стоимости денег используются ожидаемые, а не фактические потоки поступающих в разные моменты денег. Действительность может отличаться от ожиданий экономического агента. Мы ещё раз сталкиваемся с тем, что решения по оценке денежных средств экономическому агенту приходится делать в условиях неполного знания, неопределённости. Неопределённой является, строго говоря, и ставка дисконтирования. Более того, эта ставка может меняться со временем. Поэтому применяемая для приведения денежной величины к текущему моменту ставка дисконтирования скорее характеризует *временные предпочтения* агента. Во всяком случае, годовая ставка дисконтирования не может быть меньше, чем ожидаемая за год инфляция.

Анализ инвестиционных проектов

Этот же принцип — приведения всех стоимостных потоков к текущей стоимости — применим при анализе инвестиционных проектов. *Инвестиционным проектом* называется использование денежных средств не для потребления товаров, а в надежде на последующую финансовую отдачу. Например, несколько лет деньги вкладываются в строительство завода.

С какого-то года, но обычно не с первого, завод начинает работать и приносить прибыль. Инвестиционный проект связан с потоками затрат и ожидаемыми потоками доходов, связанных с разными моментами времени. Вообще говоря, помещение денег на депозит в банк также можно рассматривать как инвестиционный проект.

Пусть некий инвестиционный проект характеризуется потоком ежегодных затрат и потоком ожидаемых доходов от его реализации. Обозначим через C_t затраты, осуществлённые по проекту в году t. Ожидаемые доходы от реализации проекта в том же году обозначим I_t. По своему экономическому смыслу эти величины не могут быть отрицательными. Нулевыми они могут быть. В некоторые годы реализации проекта могут не понадобиться затраты, а отдача от проекта может быть нулевой в первые годы его реализации. Разность между доходом и затратами в одном и том же году составляет чистый доход этого года: $D_t = I_t - C_t$. Сумма дисконтированных чистых потоков за всё время реализации проекта называется *чистой текущей стоимостью* и обычно обозначается *NPV*, от английского *net present value*. Чистая приведённая стоимость складывается из дисконтированных чистых доходов $NPV = \sum \frac{D_t}{(1+r)^t}$. Как и раньше, мы обозначили через r дисконтирующий множитель.

Условием того, что инвестиционный проект является доходным, служит простое правило: $NPV > 0$. При одном и том же потоке чистых доходов чистая приведённая стоимость тем ниже, чем выше ставка дисконтирования. Поэтому для каждого проекта существует ставка дисконтирования, при которой его чистая приведённая стоимость равна нулю. Этот важнейший показатель называется *внутренней нормой доходности* проекта и обычно обозначается *IRR*, от английского *internal rate of return*. Используя показатель внутренней нормы доходности, можно сформулировать эквивалентное правило для инвестирования или неинвестирования в проект. Если инвестор может занять деньги под процент меньший, чем внутренняя норма доходности проекта, то в проект выгодно инвестировать. Если же внутренняя норма доходности проекта ниже цены заёмных денег (процента, под который можно занять деньги сегодня), то от инвестирования в проект следует воздержаться.

При расчёте чистой приведённой стоимости проекта мы исходили из условия, что процент, под который занимаются деньги, одинаков при любой длительности займа. Это предположение не очень реалистично. Из повседневной жизни мы знаем, что в разные периоды времени банк может устанавливать разные проценты. Это означает, что и ставка процента, используемая как показатель дисконтирования, должна рассматриваться разной в каждом году реализации проекта. Обозначим ставку процента для займов на один год через r_1 для займов на два года — через r_2 и т. д. Совокупность ставок процента r_1, r_2, ..., r_T называется *временной структурой процентных ставок*. С учётом временной структуры процентных ставок формула для расчёта чистой приведённой стоимости проекта принимает следующий вид:

$$NPV = \frac{D_1}{(1+r_1)} + \frac{D_2}{(1+r_2)} + \ldots + \frac{D_T}{(1+r_T)}.$$

Чистая текущая стоимость может быть выражена не только в номинальных, но и в реальных терминах, учитывающих инфляцию. Перевод стоимостей потоков в реальные термины производится операцией дефлятирования, т. е. делением на индекс цен этого года к ценам текущего года. Это эквивалентно уменьшению ставки процента для каждого года на процент инфляции этого года. Такие уменьшенные на темп инфляции ставки процента называются *реальными ставками*.

Эта простая на первый взгляд формула находит разнообразное применение при разборе финансово-экономических ситуаций. Например, она помогает оценить ожидаемые выплаты по взятому кредиту.

• ИПОТЕЧНЫЙ КРЕДИТ

ЗАНЯТИЕ 5

Рассмотрим семью, которая хочет купить квартиру. Накопленных средств семье не хватает, и её глава хочет взять кредит в банке. Банки охотно дают кредиты на покупку квартиры под залог покупаемой квартиры. Такой вид кредита в нашей стране называется *ипотечным кредитом* или просто *ипотекой*. В США кредит на покупку жилья обычно оформляется через специальную фирму-посредника и называется *моргиджем*. Разумеется, кредит выдаётся под проценты. Ведь в момент, когда заёмщик будет возвращать долг, стоимость денег будет меньше. Да и прибыль от выдачи кредита банку нужна. Обычно условия выдачи ипотечных кредитов разными банками очень разные. Семья должна уметь оценить выгодность для себя разных условий кредита. Посмотрим, как применять формулу для расчёта *NPV* при оценке ипотечного кредита.

Пусть банк «Мы вас осчастливим» предлагает взять ипотечный кредит на 30 лет. Сумма предлагаемого кредита — до 3 млн р. под номинальные 15% годовых. Схема выплат предусматривает в конце каждого года возврат $\frac{1}{30}$ доли первоначального кредита (часто называемого *основным телом кредита*) и оплату накопившихся процентов.

Попробуем ответить на следующие вопросы, которые должен задать себе любой финансово грамотный заёмщик:

а) Какую сумму он должен выплатить в конце года t?

б) Какова полная сумма выплат за ипотечный кредит?

в) Какова эффективная ставка по ипотечному кредиту при использовании схемы сложных процентов?

г) Под какой номинальный процент нужно разместить в банке вклад в 3 млн р., чтобы к концу 30-летнего срока накопившихся денег хватило для расплаты по кредиту?

Начнём с первого вопроса (а).

Обозначим сумму кредита (3 млн р.) через V_0, срок займа (30 лет) — через m, а номинальную ставку процента (15%) — через r (в долях). Тогда ежегодная величина погашения основного кредита составляет $\frac{V_0}{m}$ р., при заданных числовых значениях — 100 тыс. р.

Выплата процентов в конце первого года после оформления кредита составит $V_0 r$ р. Общая сумма выплат в конце первого года равна $\frac{V_0}{m}+V_0 r=V_0\left(\frac{1}{m}+r\right)$ р. Поэтому к концу первого года размер подлежащего погашению займа уменьшится до величины $V_1=V_0\frac{m-1}{m}$ р.

В конце второго года вновь нужно выплатить $\frac{V_0}{m}$ р. в погашение основного долга и $V_1 r=V_0\frac{m-1}{m}r$ р. в погашение накопившихся процентов. Суммарно в конце второго года нужно выплатить $\frac{V_0}{m}+V_1 r=V_0\left(\frac{1}{m}+\frac{m-1}{m}r\right)$ р. Размер оставшейся части кредита уменьшится до $V_2=V_0\frac{m-2}{m}$ р.

Аналогично в конце года t нужно выплатить $\frac{V_0}{m}$ р. в погашение основного долга и $V_{t-1}r=V_0\frac{m-t+1}{m}r$ р. процентных платежей. Суммарно в конце этого года нужно выплатить $\frac{V_0}{m}+V_{t-1}r=V_0\left(\frac{1}{m}+\frac{m-t+1}{m}r\right)$ р.

Это выражение и представляет собой ответ на первый вопрос. Очевидно, что с каждым годом размер платежа уменьшается.

Мы готовы перейти к вопросу (б). Найдём общую сумму выплат по ипотечному кредиту при таких условиях. Общая сумма выплат за всё время кредита составит

$$\sum\nolimits_1^m V_t=V_0\sum\nolimits_1^m\left(\frac{1}{m}+\frac{m-t+1}{m}r\right)=V_0\left(1+\sum\nolimits_1^m\left(\frac{m-t+1}{m}r\right)\right)=V_0\left(1+\frac{r}{m}\sum\nolimits_1^m(m-t+1)\right)\text{ р.}$$

Входящая в это выражение сумма является суммой m членов арифметической прогрессии с первым членом m и последним членом 1. По известной формуле эта сумма равна $\frac{m(m+1)}{2}$.

Окончательно общая сумма выплат составляет $V_0\left(1+\frac{r}{2}(m+1)\right)$. Подставив заданные числа, получим 9 млн 975 тыс. р. Другими словами, плата за 3-миллионный ипотечный кредит составит 6 млн 975 тыс. р., более чем вдвое превосходя размер кредита.

Найдём теперь, под какой процент нужно положить в банк 3 млн р., чтобы по истечении 30 лет вклад равнялся найденной общей сумме выплат (вопрос (в). Учтём, что схема выплат предусматривает ежегодное начисление процентов. В этих условиях величина вклада через t лет составляет V_0 $(1 + r)^t$ в обычных обозначениях. Приравняем её к рассчитанному объёму выплат, который обозначим через S. Получили уравнение относительно неизвестной ставки процента: $V_0(1 + r)^t = S$. После логарифмирования получим $t \cdot \ln(1 + r) + \ln V_0 = \ln S$. Отсюда $\ln(1+r)=\frac{1}{t}\ln\left(\frac{S}{V_0}\right)$. Или $r=exp\left(\frac{1}{t}\ln\left(\frac{S}{V_0}\right)\right)-1$. Подставив числовые данные, получим 4,0862%.

Уменьшение начального вклада до 1 млн р. увеличивает необходимую ставку процентов по вкладу до 7,9685%.

Уже отмечено, что объёмы ежегодных выплат различаются. Посмотрим, во сколько раз различаются максимальная и минимальная годовые выплаты в заданных условиях. Очевидно, что максимальная выплата производится в конце первого года, а минимальная — в конце последнего.

Используя ранее полученную формулу, получим $\frac{V_0\left(r+\frac{1}{m}\right)}{V_0\left(\frac{1}{m}r+\frac{1}{m}\right)}=\frac{(1+rm)}{(1+r)}$.

После подстановки численных значений получаем, что первый платёж превышает последний в 4,78 раза.

Чтобы уменьшить различие в сумме ежегодных выплат за ипотечный кредит, банк часто предлагает установить равную величину ежегодных выплат (эту величину называют *аннуитетом*) . Посмотрим, каков должен быть в этой схеме размер ежегодной выплаты, чтобы к концу 30-го года заём был полностью погашен. Условия кредита в остальном принимаются неизменными.

Обозначим ежегодный размер платежа через D. Дисконтируя сумму платежа в конце года t к текущей стоимости на момент займа, получим

$PV_t = \frac{D}{(1+r)^t}$. Суммируя, получим, что $\sum_1^m \frac{D}{(1+r)^t} = D\sum_1^m \frac{1}{(1+r)^t}$.

Второй сомножитель является суммой m членов геометрической прогрессии с первым членом $\frac{1}{1+r}$, последним членом $\frac{1}{(1+r)^m}$ и знаменателем прогрессии $\frac{1}{1+r}$.

Тогда $\sum_1^m \frac{1}{(1+r)^t} = \frac{\frac{1}{r+1}\left[1-\frac{1}{(1+r)^m}\right]}{1-\frac{1}{r+1}}$.

После упрощений получим $V_0 = D\frac{(1+r)^m - 1}{r(1+r)^m}$. Отсюда $D = V_0\frac{r(1+r)^m}{(1+r)^m - 1}$.

Подставив численные значения, получим, что при такой схеме заёмщик ежегодно платит 456 900 р. 60 к.

- ЦЕННЫЕ БУМАГИ
- БЕСКУПОННЫЕ ОБЛИГАЦИИ

ЗАНЯТИЕ 6

Ценные бумаги

Размещая средства на депозите в банке, получая ипотечный или иной кредит, лицо заключает с финансовой организацией договор. В договоре оговариваются объём средств, условия их возвращения, схема и размер процентных выплат. Вполне допустимы и другие условия, если с ними соглашаются обе стороны договора.

Но уже давно поняли, что есть большие удобства в том, чтобы стандартизировать условия договора. Тогда любому экономическому агенту легче разобраться в финансовых потоках, которые следуют из этого договора. Более того, и это самое важное, такой стандартный договор можно продать третьему лицу. Это лицо, в свою очередь, может получать положенные финансовые средства или продать стандартный договор ещё одному экономическому агенту. Но раз нечто можно продать, то это нечто имеет стоимость или цену. Поэтому стандартные договоры получили общее название *ценных бумаг*. В зависимости от типа стандартных условий, формы выпуска, условия обращения, способов получения финансовых потоков ценные бумаги бывают разных видов. Самый распространённый и знакомый каждому тип ценных бумаг — банкноты, обыкновенные деньги. К другим распространённым видам ценных бумаг относятся облигации, акции, векселя, сберегательные сертификаты. В учебниках по финансовой экономике можно найти подробное описание различных видов ценных бумаг, их

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13

основных свойств и признаков. Мы же рассмотрим математические аспекты использования только самых распространённых и простых видов ценных бумаг.

Начнём рассмотрение с одного из старейших видов ценных бумаг — облигаций.

Облигации выпускаются государствами или фирмами, которые далее будем называть *эмитентами*. Соответственно выпуск облигаций называется *эмиссией*. Фактически, продавая облигации, эмитенты становятся заёмщиками. Лица или организации, купившие облигации, — кредиторами. Поскольку кредит (покупка облигации) выдаётся в надежде на будущие финансовые поступления, держатель облигации является инвестором. Покупка облигации может рассматриваться как специальный вид инвестиционного проекта.

!

Облигация — это ценная бумага, которая отражает условия кредита (и его погашения) между эмитентом и инвестором.

Существует разветвлённая классификация типов облигаций по разным признакам. Мы опишем математику финансовых обязательств применительно только к некоторым из них.

Бескупонные облигации

!

Бескупонной облигацией (*дисконтной облигацией*) называется ценная бумага, по которой не производится никаких выплат до окончания срока её действия. Окончание срока действия облигации, сопровождаемое выплатой её номинальной стоимости, называется *погашением облигации*.

Поэтому облигация приносит доход, только если стоимость её приобретения (рыночная цена) ниже номинальной стоимости. Если срок до погашения составляет один год, доходность по бескупонной облигации рассчитывается по очевидной формуле $r_1 = \dfrac{M - P_{1t}}{P_{1t}}$. Мы обозначили номинальную стоимость облигации через M, а цену её покупки — через P_{1t}. Рассмотрим цену покупки облигации как её текущую стоимость, а цену погашения — как будущую стоимость. По уже известной нам формуле можно выразить внутреннюю норму доходности от «проекта» — вложения средств в облигацию: $P_{1t} = \dfrac{M}{(1 + IRR)}$. Отсюда получаем, что $IRR = \dfrac{M - P_{1t}}{P_{1t}} = r_1$. Другими словами, годовая доходность бескупонной облигации просто равна её внутренней норме доходности.

Для облигации с двухлетним сроком до погашения текущая стоимость выражается формулой $P_{2t} = \dfrac{M}{(1 + r_2)^2}$. Через r_2 мы обозначили годовую ставку сложного процента. Из приведённого соотношения легко выражается годовая ставка процента для облигации с двухлетним сроком до погашения: $r_2 = \left(\dfrac{M}{P_{2t}}\right)^{1/2} - 1$.

Аналогично для бескупонной облигации со сроком до погашения n лет получим, что годовая ставка сложного процента выражается формулой

$$r_n = \left(\frac{M}{P_{nt}}\right)^{1/n} - 1.$$

Конечно, облигации можно покупать в любое время. Не обязательно, чтобы для погашения оставалось целое количество лет. Теоретически стоимость облигации за время t до погашения облигации нужно определять по принципу мгновенного начисления процента. Если предположить доходность облигации r постоянной, то формула для вычисления цены имеет вид $P_t = M \cdot e^{-rt}$.

Однако время до погашения неразумно высчитывать с точностью до секунды и долей секунды. На практике время до погашения облигации определяется с точностью до дня. Поэтому, если до погашения осталось меньше одного года, используется формула сложно-простого процента. По этой формуле цена P_t облигации, покупаемой за t дней до погашения, будет равна $P_t = \frac{M}{\left(1+\frac{r_1}{365}\right)^t}$. Если к тому же число дней до погашения заметно меньше года, то можно использовать приближённое выражение. Для его получения нужно разложить дробь в знаменателе по биному Ньютона и оставить в длинном выражении только два первых слагаемых $\left(1+\frac{r}{365}\right)^t \approx 1+t\frac{r}{365}$. Тогда формула для цены дисконтной облигации принимает следующий вид:

$$P_t \approx \frac{M}{\left(1+\frac{rt}{365}\right)}.$$

Занятие 7

Купонные облигации

Выпустивший **купонную облигацию** эмитент обязуется в строго определённые моменты осуществлять её обладателю так называемые купонные выплаты. Эти выплаты обычно выражены в процентах от номинальной стоимости облигации.

Например, пусть по облигации номинальной стоимостью в 1000 р. ежеквартально платится 10% стоимости, т. е. 100 р. Если облигация выпущена на однолетний срок, то по истечении первых трёх кварталов после выпуска (эмиссии) обладателю облигации выплачивают по 100 р., а по истечении четвёртого — 1100 р. При погашении эмитент выплачивает вместе с последним купонным платежом ещё и номинальную стоимость облигации.

Купонные выплаты могут быть одинаковыми в каждую выплату, а могут быть разными. Облигация с одинаковыми купонными выплатами называется *облигацией с фиксированным купоном*. Облигация с разными купонными выплатами называется *облигацией с плавающим купоном*.

Выпуская в свет облигацию с фиксированным купоном, эмитент ожидает, что за всё время жизни облигации экономические условия сохранятся примерно одинаковыми. Разумным решением выглядит, например, при эмиссии облигации назначить купон примерно совпадающим по величине с действующими в этот момент рыночными ставками доходности. Если за время жизни купонной облигации рыночные ставки мало изменятся или даже возрастут, эмитент не проиграет. Но если рыночные ставки заметно упадут, то эмитент финансово пострадает. Он будет обязан платить купившим облигации бóльшую доходность, чем могут принести эти деньги ему самому.

Осторожный инвестор установит разные по размеру купоны. Но всё равно, чтобы определить купон для каждого момента выплаты, эмитент должен предсказать примерную величину рыночных процентных ставок в эти периоды. В очередной раз мы видим, что любое финансовое решение сопряжено с риском, в данном случае риском неудачно предсказать будущие экономические условия. Рискует и покупатель облигации. Он прогадает, если рыночный процент заметно превысит купонные выплаты. Чтобы снизить риск, часто применяемой стратегией является установление размера плавающего купона в зависимости от экономических условий. Например, устанавливается купонная выплата на 2,5% выше уровня инфляции на момент выплаты купона. В этом случае купонная выплата состоит из двух частей. Одна часть постоянная, в нашем примере — 2,5%. Вторая часть купонной выплаты переменная. Она зависит от внешних экономических условий.

Человек, купивший облигацию, получит за время её жизни (обращения на рынке) денежные потоки, состоящие из последовательных купонных выплат и номинальной стоимости облигации в конце. Приходить эти денежные потоки будут в различные моменты. Мы уже знаем, как найти текущую стоимость этих разновременных денежных потоков. Нужно просуммировать их дисконтированные величины. Полученная приведённая к начальному моменту стоимость (текущая стоимость) и будет справедливой ценой купонной облигации. Справедливой в том смысле, что отклонения от этой цены будут невыгодны либо эмитенту, либо покупателю облигации. В экономике такую цену называют *равновесной*.

Особенностью ситуации является то, что и эмитент, и возможный покупатель облигации могут не одинаково оценивать норму дисконтирования. Точнее — нормы дисконтирования для разных периодов. Поэтому каждый из них рассчитывает свою оценку равновесной цены. Если рыночная стоимость акции в некоторый момент меньше, чем оценка покупателя, то тому выгодно купить облигацию. А если её рыночная стоимость выше

14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

оценки эмитента, то эмитенту выгодно продавать облигации. Но так как у каждого из экономических агентов нет точного и полного знания о будущих рыночных условиях, любые их решения сопряжены с риском. Мы обсудим это позднее.

Рассмотрим облигацию с фиксированным купоном. Обозначим через K величину купонной выплаты. Напомним, обычно её устанавливают в процентах от номинальной стоимости. Поэтому $C = kM$, где k — фиксированный купон в долях от номинальной стоимости облигации M. Если купон выплачивается ежегодно в течение n лет, то текущая равновесная стоимость облигации определяется следующей формулой:

$$P = \frac{K}{1+r} + \frac{K}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{K}{(1+r)^n} + \frac{M}{(1+r)^n}.$$

В этой формуле мы обозначили через r желаемую годовую норму доходности для покупателя облигации. Если же r обозначает оценку рыночной ставки эмитентом, то та же формула позволяет рассчитать оценку стоимости облигации для эмитента.

Мы видим, что дисконтированные купонные платежи составляют убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $\frac{1}{1+r}$. Используя выражение для суммы геометрической прогрессии, получим $P = K\frac{\frac{1}{1+r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^n}\right)}{1-\frac{1}{1+r}} + \frac{M}{(1+r)^n}$. Упрощаем это выражение и получаем $P = K\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} + \frac{M}{(1+r)^n}$. При небольшом числе купонных выплат проще использовать первоначальную формулу с прямым суммированием, а не формулу с суммой геометрической прогрессии.

Если выплата фиксированного купона производится m раз в год, то формула для расчёта цены облигации принимает следующий вид:

$$P = \frac{K}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^m} + \frac{K}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{2m}} + \ldots + \frac{K}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}} + \frac{M}{(1+r)^n}.$$

В этой формуле использованы сложно-простые проценты, как мы уже делали при расчёте стоимости депозита. Обратите внимание, что сложно-простые проценты используются только для приведения к текущей стоимости купонных выплат. Номинальная стоимость облигации по-прежнему дисконтируется по схеме сложных процентов.

Для расчёта цены облигации с плавающим купоном используется, по сути, аналогичная формула. Вот только величина купона в каждую выплату будет разной. Обозначим величину купона в конце периода выплаты с номером t через K_t. Остальные обозначения сохраним, как в предыдущем случае. Тогда цена облигации с плавающим купоном определяется следующей формулой:

$$P = \frac{K_1}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^m} + \frac{K_2}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{2m}} + \ldots + \frac{K_{n \cdot m}}{\left(1+\frac{r}{m}\right)^{nm}} + \frac{M}{(1+r)^n}.$$

Если купонная облигация продаётся по цене ниже номинальной, то говорят, что она *продаётся с дисконтом*. Если цена облигации будет выше, чем номинальная, то говорят, что облигация *продаётся с премией*.

Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть до конца срока исполнения купонной облигации номинальной стоимостью 2000 р. осталось три года. Фиксированный купон стоимостью 5% номинала выплачивается каждый квартал. При покупке облигации инвестор хочет получить доходность 13%. По какой цене инвестор готов купить такую облигацию?

В заданных условиях каждый квартал купонная выплата составит 5% от 2000 р., что составляет 100 р. Воспользуемся формулой $P = K\frac{(1+r)^n - 1}{r(1+r)^n} + \frac{M}{(1+r)^n}$. Подстановка числовых значений даёт $P = 100\frac{(1{,}13)^{12} - 1}{0{,}13\left(1+\frac{0{,}13}{4}\right)^{12}} + \frac{2000}{\left(1+\frac{0{,}13}{4}\right)^3}$. Расчёт проще всего производить на компьютере. Есть специальные финансовые программы, но легко провести расчёты и в электронных таблицах Excel. Рассчитанная справедливая цена облигации составит 3133 р. 57 к. Облигация на таких условиях будет продаваться с премией.

ТИПЫ ЦЕННЫХ БУМАГ: АКЦИИ

ЗАНЯТИЕ 8

Если у человека есть временно «лишние» деньги, у него есть две рассмотренные выше возможности их сохранения и приумножения. Во-первых, можно поместить деньги на депозит (положить в банк под проценты). Во-вторых, можно приобрести купонную или бескупонную облигацию. Оба этих инструмента достаточно надёжны, но обещают небольшую доходность. Среди инвесторов, предпочитающих более высокую доходность, весьма популярны ценные бумаги другого типа, называемые акциями. Пожалуй, акции — самые распространённые ценные бумаги.

Акции могут быть выпущены в оборот любыми предприятиями, банками, компаниями, которые созданы в форме акционерного общества. Форма акционерного общества означает, что капитал компании поделён на отдельные доли, которые и называются *акциями*. В английском языке акции часто называются *share*, что в переводе и означает «доля». В отличие от облигаций, у акций нет срока погашения, выпустившая их компания не берёт на себя обязательств по их выкупу.

Капитал компании, выпускающей акции, составляется из взносов владельцев. Эти взносы могут быть сделаны и в денежной форме, и в виде оборудования, и в виде патентов на изобретения и т. д. Стоимость капитала делится на общее количество выпускаемых акций, что даёт номинальную стоимость одной акции. Сами владельцы, сделавшие взносы в капитал, называются *акционерами*. Выпущенные (эмитированные) акции распределяются между акционерами пропорционально взносу в капитал акционерного общества.

Акции могут быть полностью распределены только между вкладчиками в капитал, такая форма организации компании называется *закрытым акционерным обществом (ЗАО)*. В России число акционеров ЗАО не может превышать 50 человек. При другой форме организации компании её акции могут быть также предложены к свободной покупке и иным экономическим агентам, не только тем, которые вложились в капитал компании. Такая форма организации называется *открытым акционерным обществом (ОАО)*. В этом случае к акционерам относятся все владельцы акций. Акции ОАО свободно продаются и покупаются на специальных площадках, называемых *биржами*.

Обладание акцией даёт акционеру право на долю прибыли от деятельности компании, на участие в управлении компанией, на долю имущества компании при ликвидации акционерного общества. Выплачиваемая в заранее оговорённые моменты времени часть общей прибыли компании носит название *дивиденды*. Особенностью дивидендов является то, что всякий раз решение об их размере принимается особым решением. Собрание акционеров устанавливает размер дивидендов на данную выплату. Дивиденды могут быть и нулевыми, если отчётный период принёс компании малую прибыль. Компания может отказаться от выплаты дивидендов и при наличии достаточно высокой прибыли, если примет решение вложить всю прибыль в инвестиции для развития бизнеса.

Решения о размере дивидендов, о направлениях использования прибыли, о приобретении других компаний или о слиянии с ними принимаются голосованием акционеров. Число голосов у акционера пропорционально числу его акций. Поэтому чем больше акций у акционера, тем больше его влияние на дела и управляющие решения акционерного общества. Понятно, что владельцы небольшого числа акций не могут оказать существенного влияния на дела компании. В то же время компании заинтересованы в том, чтобы таких акционеров, называемых *миноритарными*, было много. Ведь каждая проданная акция — это дополнительные финансовые ресурсы компании. Поэтому права миноритарных акционеров обычно оговариваются особо.

Кроме обыкновенных акций, о которых мы говорили до сих пор, могут существовать и так называемые *привилегированные акции*. Владельцы привилегированных акций не могут использовать их при голосовании по большинству текущих вопросов. Но зато по привилегированным акциям гарантированно выплачиваются дивиденды. Размер дивидендов по привилегированным акциям чётко определён при их эмиссии. Правда, есть одна ситуация, когда дивиденды не выплачиваются даже по привилегированным акциям. Это случается, когда в отчётном периоде компания не получила прибыли или получила прибыль, недостаточную для выплаты оговорённых размеров дивидендов по привилегированным акциям. В качестве компенсации владельцы привилегированных акций получают право голосовать ими при рассмотрении всех вопросов. И голосовать они смогут вплоть до достижения компанией достаточного объёма прибыли для выплаты дивидендов.

Привилегированные акции подразделяются на две группы в зависимости от того, компенсируются или нет невыплаченные из-за отсутствия средств дивиденды в последующие периоды. Если недоплаченные дивиденды в последующие периоды не компенсируются, то такие привилегированные акции называются *некумулятивными*. Ко второй группе — *кумулятивным* акциям — относятся привилегированные акции, по которым недоплаченные дивиденды компенсируются в последующие периоды. Разумеется, если появится достаточная прибыль.

Впрочем, по стратегическим вопросам развития компании голосуют все акции: и обыкновенные, и привилегированные. К таким стратегическим вопросам относятся ликвидация акционерного общества, внесение изменений в его устав, слияние и поглощение, пересмотр оговорённых размеров дивидендов по привилегированным акциям.

У владельцев привилегированных акций есть также первоочередные права на долю имущества при прекращении деятельности компании. Если компанию ликвидируют, то её имущество продают. Из вырученной суммы сначала отдают долги кредиторам, затем выплачивают деньги владельцам привилегированных акций, а уж затем — владельцам обыкновенных акций. Конечно, в тяжёлых случаях владельцам обыкновенных акций может почти ничего не остаться.

Как уже говорилось, акции — и привилегированные, и обыкновенные — продаются на биржах. Их цена определяется только желанием продавцов продать и желанием покупателей купить. Она не имеет никакого отношения к номинальной цене акций. Обычно рыночная цена привилегированных акций ниже, чем цена обыкновенных. Это вызвано тем, что привилегированные акции не участвуют в голосовании.

Аналогично облигациям размер ставки дивидендов по привилегированным акциям может быть фиксированным или переменным. При переменной ставке дивидендов она обычно устанавливается в виде процента от чистой прибыли, а не от номинальной стоимости акции. Например, может быть решено, что на дивиденды по привилегированным акциям расходуется 15% чистой прибыли отчётного периода. Размер дивидендов, приходящийся на одну привилегированную акцию, рассчитывается делением выделенного объёма прибыли на количество привилегированных акций.

Привлекательность акций для инвесторов обусловливается не столько размером дивидендов, сколько изменением рыночной цены акций. Конечно, есть крупные компании, которые скупают акции какого-либо акционерного общества, для того чтобы играть заметную (или даже решающую) роль в управлении этим обществом. Получив контроль над акционерным обществом, компания может сменить профиль выпускаемой продукции, закрыть одни заводы и открыть другие и т. д. Рядовой инвестор покупает акции с целью получить высокую доходность за счёт роста стоимости акций. Практика показывает, что доходность акций значительно выше, чем доходность облигаций или вкладов. В то же время с акциями связан значительно больший риск. Цены акций на бирже очень быстро растут и снижаются, разброс цен весьма велик. Мера разброса цен на финансовых рынках носит название *волатильность*. Чем больше разброс цен на акцию конкретной компании при отдельных операциях купли-продажи, тем более *волатильна* эта акция, тем сложнее предугадать её цену в следующих операциях. Распространённой характеристикой волатильности является выборочная дисперсия цен акций. Позже мы поговорим о дисперсии и методах её оценки.

В каждый момент времени на бирже присутствуют предложения на продажу и покупку популярных акций. Каждое предложение-заявка характеризуется ценой и объёмом. Продавец хочет продать акцию по более высокой цене, а покупатель — купить по более низкой. Поэтому лучшая цена заявки на продажу выше лучшей цены заявки на покупку. Разность между этими ценами носит название *спрэд*. По акциям, которые чаще всего продаются и покупаются на рынке, спрэд невелик. Такие акции принято называть «голубыми фишками». По акциям, которые продаются реже, спрэд может быть значительно выше.

- СТОИМОСТЬ АКЦИИ
- ДОХОДНОСТЬ АКЦИИ

ЗАНЯТИЕ 9

Стоимость акции

Применительно к акциям понятие стоимости используется в разных смыслах. Мы уже упоминали номинальную стоимость акции. Напомним, что это величина, получаемая делением уставного капитала компании на количество выпускаемых акций. Единственное назначение номинальной стоимости — соизмерить вклады акционеров в уставный капитал и распределить акции пропорционально этим вкладам. Номинальная цена акции не имеет экономического значения для инвесторов, решающих, становиться ли им акционерами.

Когда акционерное общество впервые предлагает акции на бирже, оно объявляет об этом в так называемом проспекте эмиссии. В этом проспекте акционерное общество обязано объявить, по какой цене оно будет предлагать купить акции. Эта предлагаемая при первичном размещении цена акции называется *ценой размещения*. Она всегда превышает номинальную цену акции. В процессе существования успешной компании она может неоднократно прибегать к дополнительной эмиссии акций. Во-первых, возникает потребность увеличить уставный капитал компании. Во-вторых, и это главное, выпуская дополнительные акции, акционерное общество привлекает дополнительные денежные средства инвесторов. Осуществляя дополнительную эмиссию, компания также обязана публично объявить первоначальную цену, по которой новые акции будут предложены на бирже. Это также будет цена размещения, но она не обязательно должна быть одинаковой для всех эмиссий одной и той же акции. Эта цена уже имеет значение для потенциального инвестора. В зависимости от ожиданий инвестора относительно будущей динамики стоимости акции инвестор может либо купить акции при их первичном размещении, либо подождать снижения цены. Инвестор может и вовсе отказаться покупать акции этой компании, считая, что они не принесут желаемой доходности.

Самой важной для инвестора является рыночная цена акции. Это та цена, по которой продаются и покупаются акции на бирже. Часто, чтобы отличать эту стоимость от цены размещения, рыночную цену называют *ценой на вторичном рынке*. Рыночная цена акции может колебаться в каждой сделке купли-продажи. Цена каждой сделки интерпретируется как реализация «теоретической» рыночной цены. Поэтому для характеристики не одной сделки купли-продажи, а состояния рынка этой акции нужно использовать оценки рыночной цены. Эти оценки получаются способами математической статистики, которые мы рассмотрим позже. Например, может использоваться средняя рыночная цена акции за день, рассчитываемая как среднее арифметическое по всем сделкам по данной акции за прошедший день. Часто используют также цену закрытия. Цена закрытия — это стоимость акции в последней сделке купли-продажи, осуществлённая в прошедший биржевой день. Произведение эмитированных акций конкретной компании на рыночную цену этой акции даёт рыночную капитализацию компании. Так как под рыночной стоимостью акции мы понимаем её оценку, то оценкой является и рыночная капитализация компании.

Если компания прекращает свою деятельность, то возникает ещё одна стоимостная характеристика акции — *ликвидационная стоимость*. Правда, эта характеристика применяется только к привилегированным акциям, но не к обыкновенным. Ликвидационная стоимость одной привилегированной акции — это сумма денежных средств, которую получит владелец акции при ликвидации акционерного общества. По российским законам в уставе акционерного общества должна быть указана либо сама ликвидационная стоимость, либо методика её расчёта. Владельцы обыкновенных акций получают в случае ликвидации компании лишь то, что останется от проданного имущества компании после выплат кредиторам и владельцам привилегированных акций.

В процессе текущей экономической деятельности предприятие должно оценивать так называемую *бухгалтерскую* (или *балансовую*) *стоимость* обыкновенной акции. Эта оперативная оценка связана с текущей стоимостью имущества компании, её долговыми обязательствами. Стоимость имущества компании регулярно пересчитывается по специальным бухгалтерским инструкциям. Причинами пересчёта являются приобретение нового оборудования, инфляция, эмиссия дополнительных акций. Под бухгалтерской (балансовой) стоимостью понимают приходящуюся на одну обыкновенную акцию разность между чистыми активами компании и ликвидационной стоимостью всех привилегированных акций. В свою очередь, чистые активы компании — это балансовая стоимость имущества компании за вычетом её обязательств перед кредиторами.

Текущая стоимость акции складывается для её владельца из суммы ожидаемых дисконтированных потоков. Проще всего текущую стоимость рассчитать для привилегированных акций. В этом случае применяется уже знакомая нам формула приведения потоков к текущему моменту: $P = \frac{d_1}{(1+r)^1} + \frac{d_2}{(1+r)^2} + \ldots + \frac{d_n}{(1+r)^n}$. В этой формуле сохранены обозначения предыдущих разделов. Если дивиденды заданы не фиксированной величиной, а формулой их расчёта, то неопределённость стоимости акции ещё больше возрастает.

Для обыкновенной акции размер дивидендов трудно прогнозировать. Для оценки будущих дивидендов применяются сложные эконометрические методы, но их точность невысока. Второй составляющей стоимости акции является изменение её рыночной цены. Для большинства акций доходность от повышения рыночной цены значительно превосходит доходность по выплачиваемым дивидендам. Поэтому именно ожидание роста биржевой стоимости акции представляет собой основной *индикатор* для инвестора: покупать акцию или нет.

Доходность акции

Доходность акции может быть разделена на две составляющие: текущую доходность от дивидендных выплат и доходность от изменения рыночной стоимости. Доходность от дивидендных выплат называется часто *текущей доходностью*. Она представляет собой выраженное в процентах отношение годовых выплат дивидендов к рыночной цене акции в начале года. Так, если инвестор приобрёл акции по цене 1 тыс. р. за штуку и по итогам года на каждую акцию было выплачено 70 р. дивидендов, то текущая доходность этих акций составила 7%.

Полная годовая доходность акции определяется отношением суммы дивидендов и прироста рыночной цены акции к цене покупки. Если инвестор владеет акцией ряд лет, то среднегодовая доходность по этой акции рассчитывается как среднее арифметическое полных годовых доходностей.

Разумеется, при принятии решения о покупке акции инвестор может закладывать в расчётные формулы только ожидаемые размеры дивидендов и ожидаемую рыночную цену акции на конец рассматриваемого периода. Чем более трудно прогнозируется цена акции на будущее, тем менее надёжен расчёт ожидаемой доходности. Как правило, прогноз ожидаемой цены тем менее надёжен, чем выше волатильность цен в момент покупки акций.

• РИСКИ ФИНАНСОВЫХ РЕШЕНИЙ

• ОПИСАНИЕ РИСКА В ПОНЯТИЯХ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

ЗАНЯТИЕ 10

Риски финансовых решений

Несколько раз мы уже обращали внимание, что финансовые решения принимаются как продавцом, так и покупателем в условиях неопределённости. Значительная часть неопределённости связана с тем, что финансовое решение (например, приобретение облигации на таких-то условиях) принимается сегодня, а выгоды и убытки от последствий этого решения выявятся только через некоторое время. Возникает как минимум два вида рисков.

Первый риск — выполнит ли свои обещания наш контрагент. Например, эмитент обязуется выплачивать купоны в установленном размере в течение срока жизни облигации. Однако эмитент может отказаться выполнять свои обязательства. Придётся обращаться в суд, нести непредвиденные судебные издержки. Мы также понимаем, что если мы получаем деньги позже предусмотренного срока, то их текущая стоимость уменьшается. Эмитент может вообще обанкротиться — прекратить расплату со всеми контрагентами и остановить хозяйственную деятельность. В этом случае всё оставшееся у эмитента имущество будет разделено между его кредиторами по специальным процедурам.

Наконец, нас могут сознательно вводить в заблуждение, обещать очень высокие выгоды. В практике различных стран и России есть множество случаев так называемых финансовых пирамид. Самые нашумевшие случаи в России — МММ и «Властилина». Детали обмана могут различаться, но идея финансовой пирамиды всегда одна и та же. Эмитент обещает по ценной бумаге (облигации, векселю) доходность, которая значительно выше рыночной. Привлечённые высокой доходностью и агрессивной рекламой инвесторы покупают эти ценные бумаги. Первые инвесторы получают высокие доходы, что привлекает (заманивает) новых инвесторов. Пока число инвесторов быстро нарастает, эмитент в состоянии выплачивать им высокую доходность. Шумная реклама способствует расширению числа инвесторов. Но как только приток новых инвесторов замедляется, эмитент не в состоянии выплачивать обещанные доходы. Как правило, это происходит на максимуме числа инвесторов. Переведя собранные деньги в надёжное место, эмитент прекращает платежи. Затем могут последовать арест, осуждение и заключение под стражу эмитента, но ваши деньги уже не вернутся.

Этот вид финансового риска уместно назвать риском недобросовестного или сомнительного эмитента. Недобросовестный эмитент — это тот, который сознательно обманывает инвестора. Сомнительный эмитент — это тот, кто хочет выполнить свои обязательства, но является либо излишне оптимистичным, либо просто плохим экономистом. Распознать эти категории эмитентов не всегда легко. Основной признак мошенника — слишком высокая доходность, предлагаемая им. Обычно эта доходность заметно выше рыночной. Ещё одним признаком является плохое объяснение того, за счёт каких экономических причин такая высокая доходность будет обеспечиваться. В расчётах подобных тем, что рассмотрены нами, можно заметить существенное отклонение от обещаний инвестора. К сожалению, элементарная жадность заставляет многих поверить обманщикам. Наивные инвесторы надеются обогатиться раньше, чем обманщик прекратит платежи.

Труднее распознать сомнительного эмитента. Он не обещает сверхвысокую доходность, но не в силах обеспечить и рыночную. Самостоятельно инвестор с трудом может заподозрить неладное. Опасность могут предугадать профессиональные агентства, специализирующиеся на оценке состоятельности компаний и публикующие результаты своих оценок.

Ко второму виду риска следует отнести невозможность точно прогнозировать будущие экономические условия. Мы закладываем в расчёты текущей цены ценной бумаги наши ожидания инфляции, рыночного процента и других величин. Мы принципиально не можем знать их точно. Поэтому наши ожидания, как правило, отличаются от последующей ситуации, и мы можем как проиграть, так и выиграть по сравнению с нашими расчётами. Это означает, что полагаться непосредственно на расчёт и принимать решения только исходя из результатов расчётов не очень разумно. Одним из приёмов является понимание ожидаемых величин как случайных и применение к финансовым расчётам понятий и аппарата теории вероятностей и математической статистики. Перейдём к рассмотрению их основных понятий.

Описание риска в понятиях теории вероятностей

Мы согласились, что многие величины, которыми мы оперируем, неразумно полагать точными. Так, рыночные ставки заимствования через месяц могут меняться в некотором диапазоне. Рассматриваемые же до сих пор формулы требуют точных числовых значений. Удобной математической конструкцией будем считать ту, при которой ожидаемые величины являются случайными, принимающими одно из возможных своих значений.

Для придания этим идеям более точного смысла теория вероятностей вводит понятие случайного эксперимента. Эксперимент понимается в теории вероятностей не так, как в физике или химии. В теории вероятностей случайным экспериментом называют любое измерение, наблюдение, предсказание. Случайный эксперимент характеризуется тем, что его исход не полностью определён при одинаковых условиях проведения эксперимента. Классические примеры случайных экспериментов — подбрасывание монеты, раздача игральных карт и т. д. Исход случайного эксперимента может быть разным в разных попытках, даже если мы в точности повторим все условия проведения эксперимента. В экономике и финансах под случайным экспериментом понимают любое наблюдение. Например, если мы говорим, что инфляция в январе составила 6% в годовом исчислении, то мы мысленно допускаем, что если бы удалось каким-то образом повторить «опыт января», то инфляция могла бы быть несколько иной, например 4 или 7%.

Впрочем, теория вероятностей и математическая статистика изучают не любые эксперименты с неопределённым результатом. Теория вероятностей занимается описанием только таких явлений, для которых характерна статистическая устойчивость частот. Устойчивость частот означает, что при многократном проведении некоторого эксперимента частота выпадения определённого исхода примерно постоянна. Говорят, что предметом изучения теории вероятностей являются статистически устойчивые явления.

Совокупность всех различных исходов случайного эксперимента называется пространством элементарных исходов в теории вероятностей или генеральной совокупностью в математической статистике. Если обозначить элементарный исход через ω, то обычно пространство элементарных исходов обозначают Ω и пишут $\Omega = \{\omega\}$.

Фигурные скобки обозначают совокупность или множество элементов, типичный представитель которых обозначен символом, указанным в фигурных скобках.

Например, подбрасывание шестигранного кубика может рассматриваться как случайный эксперимент. Кубик может упасть так, что на его верхней грани выпадет одно, два, три, четыре, пять или шесть очков. Эти шесть возможностей и образуют элементарные исходы этого случайного эксперимента. Совокупность всех шести возможных исходов образует пространство элементарных событий.

Рассмотрим чуть более сложный пример. При двукратном подбрасывании монеты можно задать пространство элементарных событий следующим образом:

$$\Omega = \begin{Bmatrix} O & O \\ O & P \\ P & O \\ P & P \end{Bmatrix}$$

Здесь *O* означает, что выпал орёл, а *P* — что выпала решётка. На первом месте записан результат первого подбрасывания монеты, на втором — второго подбрасывания.

Мы будем называть детерминированным экспериментом эксперимент, у которого только один возможный исход. В этом и состоит различие между случайным и детерминированным экспериментами. У детерминированного эксперимента исход предопределён, а у случайного — может быть любым из пространства элементарных исходов.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ: СЛУЧАЙНЫЕ СОБЫТИЯ

ЗАНЯТИЕ 11

Совокупности некоторых, не обязательно всех, элементарных исходов будем называть *случайными событиями*.

!

Случайным событием называется любое подмножество множества Ω (любая совокупность элементарных исходов).

Например, при двукратном подбрасывании монеты определим событие *A*, состоящее в том, что один раз выпал орёл (*О*) и один раз — решётка (*Р*). Тогда совокупность (множество) $A = \{OP, PO\}$ и является частью генеральной совокупности Ω. Если случайное событие состоит только из одного элементарного исхода, то его также называют элементарным событием.

Количество элементарных исходов может быть и конечным, и бесконечным. Если количество элементарных исходов конечно, с каждым элементарным событием можно связать неотрицательное число (вероятность этого элементарного события) $P(\omega_i) = p_i$. Событие называется *статистически устойчивым*, если при многократных повторениях случайного эксперимента частота каждого исхода примерно одинакова. Например, при подбрасывании честной монеты много раз примерно в половине случаев выпадет орёл и примерно в половине — решётка.

Для рассматриваемых классических примеров подбрасывания монеты, кости или раздачи карт любой из элементарных исходов имеет равную вероятность. Мы, конечно, подразумеваем, что монета честная.

Пространство элементарных событий, в котором все элементарные события имеют одинаковую вероятность, называют *равновероятным*.

В общем случае вероятности элементарных исходов не обязательно равны между собой, но должны удовлетворять следующим свойствам:

1. Вероятность любого элементарного исхода заключена между нулём и единицей: $0 \leqslant p_i \leqslant 1$.

2. Вероятность любого события равна сумме вероятностей элементарных исходов, входящих в это событие: $P(A) = \sum\limits_{w_i \in A} p(w_i)$.

3. Сумма вероятностей всех элементарных итогов равна 1: $\sum\limits_{w_i \in \Omega} p(w_i) = 1$.

Последнее свойство называют *свойством полноты*. Оно означает, что при случайном эксперименте какой-нибудь исход обязательно произойдёт.

Если набор чисел p_i обладает этими тремя свойствами, то говорят, что на пространстве элементарных событий заданы вероятности. Пользуясь ими, мы можем посчитать вероятность любого события.

Рассмотрим следующий пример. На экзамене школьникам предлагают 20 экзаменационных билетов, содержание которых известно заранее. Из них школьник знает только 5, остальные не выучил. Каким ему лучше идти сдавать экзамен — первым или вторым? Под словом «лучше» мы подразумеваем, что у школьника больше шансов сдать экзамен.

Обозначим через n_1, n_2 номера билетов, которые вытаскивают школьники, идущие отвечать первым и вторым соответственно.

Тогда множество $\Omega = \{(n_1, n_2) | 1 \leqslant n_1, n_2 \leqslant 20, n_1 \neq n_2\}$ представляет собой пространство элементарных событий для этой задачи, состоящее из $20 \times 19 = 380$ равновероятных элементов. Пусть наш школьник знает первые 5 билетов, или просто перенумеруем их так. Тогда событие, заключающееся в том, что школьник вытащил «счастливый» билет, отвечая первым, можно записать в следующем виде: $A = \{(n_1, n_2) | 1 \leqslant n_1 \leqslant 5; 1 \leqslant n_2 \leqslant 20; n_1 \neq n_2\}$.

А событие, заключающееся в том, что школьник вытащил «счастливый» билет, отвечая вторым, имеет вид $B = \{(n_1, n_2) | 1 \leqslant n_1 \leqslant 20; 1 \leqslant n_2 \leqslant 5; n_1 \neq n_2\}$.

В силу равновероятности событий $p_i = 1/380$. Тогда, очевидно, $P(A) = p_i \times 5 \times 19 = 1/4$ и $P(B) = p_i \times 5 \times 19 = 1/4$. Вытянуть выученный билет, пойдя первым, и вытянуть выученный билет, выбирая его вторым, — события равновероятные.

В общем случае для пространства равновероятных событий можно символически записать формулу для вероятности любого события A:

$$P(A) = \frac{\text{количество элементарных событий, попавших в } A}{\text{Количество всех событий}}.$$

Если в результате случайного эксперимента может произойти бесконечное число разных исходов, то приписать одинаковую вероятность каждому элементарному исходу не получается. Например, закроем рукой циферблат часов. В некоторый момент откроем циферблат и посмотрим на положение секундной стрелки. Понятно, что стрелка может занять любое положение внутри угла в 360°. Каждому такому положению нельзя приписать одинаковую вероятность. Бесконечное пространство элементарных событий Ω не может быть пространством равновероятных событий, и классический подход неприменим. Что делать в такой ситуации, мы рассмотрим далее.

Занятие 12

- Условная вероятность
- Случайные величины

Поскольку события — это просто подмножества пространства элементарных событий, то на события распространяются операции, определённые для множеств. К этим операциям относятся объединение и пересечение множеств. Один и тот же элементарный исход может входить в разные события. Это будет означать, что соответствующие подмножества пересекаются. Если же у подмножеств нет общих точек, то у соответствующих событий нет общих элементарных исходов. Следовательно, никакой элементарный исход случайного эксперимента не может соответствовать обоим событиям. События, которые не могут произойти одновременно, называются *несовместными событиями*.

Если A и B — несовместные события, то вероятность их одновременного (совместного) наступления равна нулю: $P(AB) = 0$.

Можно ввести понятие вероятности наступления события A при условии, что событие B наступило. Такую вероятность назовём *условной вероятностью* $P(A|B)$ и определим следующим соотношением $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$. Разумеется, это выражение имеет смысл только если $P(B) \neq 0$.

Например, пусть монета подбрасывается дважды, а событие B заключается в том, что в первом подбрасывании выпадает орёл, тогда $B = \{OO;\ OP\}$. И пусть событие A заключается в том, что в двух подбрасываниях выпала хотя бы одна решётка: $A = \{OP;\ PO;\ PP\}$. Тогда вероятность того, что в двух подбрасываниях выпадет хотя бы одна решётка при условии, что в первом подбрасывании выпал орёл, равна вероятности $P(A|B) = (1/4)/(1/2) = 1/2$.

14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

Будем говорить, что событие A не зависит от события B, если $P(A) = P(A|B)$, т. е. условная вероятность события равна безусловной.

Наряду с вероятностью $P(A|B)$ рассмотрим условную вероятность $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$, теперь при $P(A) \neq 0$. Вероятность совместного наступления обоих событий может быть выражена из этих соотношений двояко. $P(AB) = P(A|B) \cdot P(B) = P(B \backslash A) \cdot P(A)$. Если событие A не зависит от события B, т. е. если $P(A|B) = P(A)$, то справедливо равенство $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$. Та же формула верна, если событие B не зависит от события A. Поэтому если событие A не зависит от события B, то и событие B не зависит от события A. Свойство независимости событий взаимно.

В подавляющем большинстве интересующих нас случаев результат случайного эксперимента характеризуется количественно, т. е. числом. Мы называем результат такого случайного эксперимента *случайной величиной*. Если множество значений случайной величины конечно или каждому такому исходу можно поставить в соответствие натуральное число (посчитать исходы), то мы называем такую случайную величину *дискретной*. Дискретная случайная величина принимает каждое из своих значений с некоторой ненулевой вероятностью. Например, число очков, выпавшее на верхней грани честного кубика, характеризуется равными вероятностями, по 1/6 каждая. Выпишем в верхней строке таблички все возможные значения случайной величины. Во второй строчке выпишем вероятности, с которыми случайная величина может принимать эти значения. Полученная табличка наглядно показывает, как вся вероятность распределяется по возможным значениям дискретной случайной величины.

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

В этом примере случайная величина (число очков на верхней грани) принимает одно из значений 1, 2, 3, 4, 5, 6 с одинаковой вероятностью 1/6.

В общем случае совокупность (конечная или счётная) значений случайной величины и соответствующих вероятностей называется *распределением случайной величины*. Полная единичная вероятность распределена между возможными исходами.

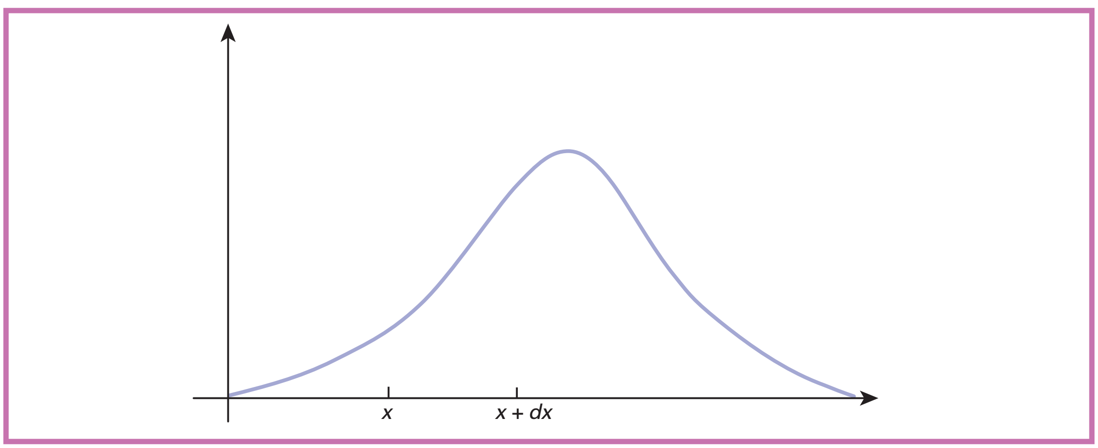
a_1	a_2	...	a_n	.	.
p_1	p_2	...	p_n	.	.

Непрерывные случайные величины

Занятие 13

Если случайная величина дискретна, то она полностью описывается табличкой, как это показано на с. 53. Но экономические величины чаще всего не являются дискретными. Их значения полностью заполняют некоторый числовой промежуток $[a, b]$. «Заменой» табличного распределения является функция плотности вероятности (плотности распределения) случайной величины (если она существует). Плотность вероятности является функцией переменной x и характеризует вероятность того, что наблюдаемое значение случайной величины попало в бесконечно малый интервал $[x, x + \Delta x]$. Площадь «прямоугольника» с высотой $p(x)$ и основанием Δx равна вероятности попасть в этот «прямоугольник»:

$$P\{x \leqslant X < x + \Delta x\} \approx p(x)\Delta x.$$



Другими словами, вероятность попасть в малый интервал пропорциональна длине интервала, коэффициент пропорциональности и есть плотность распределения в этой точке.

Математически интервал $\triangle x$ рассматривается как бесконечно малая величина, и точная формула принимает вид $P\{x \leqslant X < x + dx\} = p(x)dx$.

Функция плотности вероятности любой непрерывной случайной величины обладает следующими свойствами:

1) Плотность вероятности не может принимать отрицательные значения: $p(x) \geqslant 0$.

2) Площадь под графиком функции плотности распределения показывает вероятность того, что случайная величина приняла хотя бы какое-то значение. Поэтому эта площадь должна быть равна 1:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) = 1.$$

3) Для того чтобы площадь под всей кривой была равна 1, нужно, чтобы на концах функции распределения её значения становились всё меньше и меньше. Математически это свойство записывается в виде предельного перехода:

$$\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = 0.$$

Пример. Рассмотрим так называемое равномерное распределение. Случайная величина называется равномерно распределённой на отрезке $[a,b]$, если её плотность вероятности определяется выражением

$$p(x) = \begin{cases} c, a \leqslant x \leqslant b \\ 0, \text{вне его} \end{cases}.$$

Из второго условия функции плотности вероятности находим $c = \dfrac{1}{b-a}$.

Функция плотности вероятности существует не всегда. В тех случаях, когда она существует, она тесно связана с существующей всегда функцией распределения (иногда функцию распределения называют *кумулятивной функцией распределения*): $F(x) = P\{X \leqslant x\} = \int_{-\infty}^{x} p(z)dz$. Из выражения видно, что функция распределения в точке x равна площади под частью графика функции вероятности, расположенной слева от этой точки. По-английски функция распределения называется *cumulative distribution function*, и в литературе для её обозначения часто используется аббревиатура *CDF*.

Функция распределения обладает свойствами, которые следуют из уже рассмотренных свойств функции плотности вероятности.

1) Поскольку значения функции распределения есть суть вероятности, эти значения лежат между нулём и единицей:

$$0 \leqslant F(x) \leqslant 1 .$$

2) $F(x)$ — монотонно не убывающая функция.

3) При неограниченном стремлении аргумента функции распределения влево площадь под кривой функции плотности распределения становится всё меньше и меньше. Поэтому

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

4) При неограниченном стремлении аргумента функции распределения вправо площадь под кривой функции плотности распределения всё больше приближается к 1. Поэтому

$$\lim_{x \to \infty} F(x) = 1.$$

Для непрерывной случайной величины, зная функцию распределения, можно дифференцированием найти функцию плотности вероятности:

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}.$$

Для дискретной случайной величины также справедливо определение функции распределения. В этом случае её значение будет равно следующей сумме:

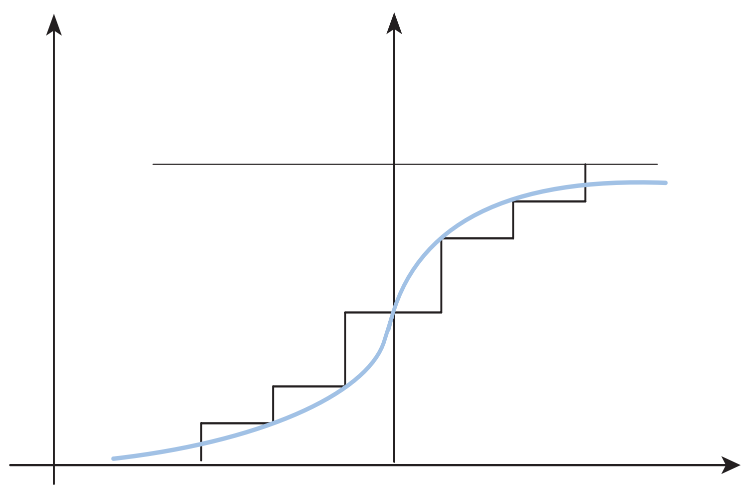
$$F(x) = \sum_{a_i \leqslant x} p_i.$$

Суммирование производится по всем возможным значениям случайной величины, которые меньше или равны x. Для дискретной случайной величины функция распределения является ступенчатой функцией со скачками p_i в точках a_i.

Если известна функция распределения, вероятность события, что значения случайной величины попадают в интервал [a, b], выражается просто разностью значений функции распределения $F(b) — F(a)$. Для непрерывного случая вероятность каждого конкретного значения случайной величины равна нулю:

$$P\{X = X_0\} = 0.$$

Графически функция распределения для дискретного и непрерывного случаев выглядит примерно так:



ЗАНЯТИЕ 14

- СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСКОЛЬКИХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН
- УСЛОВНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Совместное распределение нескольких случайных величин

Чаще всего мы рассматриваем не один экономический или финансовый показатель, а сразу несколько. Другими словами, нам приходится рассматривать особенности совместного распределения двух или нескольких случайных величин. Для описания совместного распределения нескольких случайных величин нужно ввести показатели, характеризующие такое распределение. Для дискретных случайных величин совместное распределение может быть задано таблично, а для непрерывных приходится вводить совместную плотность распределения или совместную функцию распределения.

Начнём с описания двух дискретных случайных величин. Рассмотрим условный финансовый пример. Пусть акции различных компаний характеризуются двумя признаками: доходностью и надёжностью. Эти признаки будем рассматривать как две случайные величины. Пусть доходность может принимать три значения: 4,5%, 6% и 9,5%. Надёжность определяется рейтингом компании, и мы будем выражать её числами 1, 2 и 3. Это означает, что мы рассматриваем акции первого класса надёжности, второго класса надёжности и третьего класса надёжности. Пусть на столе лежат 100 акций, и мы наудачу вытаскиваем одну из них. Вероятности вытащить акцию с фиксированной комбинацией признаков удобно свести в следующую таблицу:

Доходность, %	**Класс надёжности 1**	**Класс надёжности 2**	**Класс надёжности 3**
4,5	0,24	0,1	0
6	0,4	0,32	0,04
9,5	0	0,02	0,24

Данные в таблице показывают, что, например, среди сотни акций, лежащих на столе, имеются 32 акции одновременно второго класса надёжности и с доходностью 6%. Если акций на столе не ровно 100, а просто много, то числа в таблице показывают, как уже сказано, вероятность вытащить наудачу акцию с двумя такими значениями показателей. Каждое число в таблице, стоящее на пересечении строки с номером i и столбца с номером j, показывает вероятность того, что взятая наудачу акция имеет соответствующую доходность и надёжность класса j. Совокупность всех чисел таблицы задаёт совместное распределение двух случайных величин — надёжности и доходности акций. Используя числа из этой таблицы, мы можем рассчитать вероятности любых событий, относящихся к рассматриваемым акциям.

Например, зададим следующий вопрос: какова вероятность, что взятая наудачу акция будет иметь доходность не ниже 6% и надёжность не ниже второго класса? Вероятность такого события равна сумме следующих чисел из таблицы:

$$0{,}4 + 0 + 0{,}32 + 0{,}02 = 0{,}74.$$

В общем случае совместным распределением двух дискретных случайных величин x и y является таблица неотрицательных чисел, соответствующих парам возможных значений (x, y). Обозначим через p_{ij} вероятность того, что случайная величина x приняла свое i-е значение, случайная величина y приняла свое j-е значение. Тогда совокупность чисел в таблице представляет собой совместное распределение двух дискретных случайных величин.

Для непрерывных случайных величин совместное распределение может быть задано функцией совместной плотности распределения $p(x_1, x_2, \dots , x_n)$.

Для описания совместного распределения приходится использовать функции многих переменных. Такие функции почти не встречаются в курсах средней школы, но, по сути, описывают просто соответствие, которое для каждого набора значений переменных определяет некоторое число. Совместная функция распределения является коэффициентом пропорциональности между вероятностью попадания каждой из случайных величин в бесконечно малый интервал $[x_i, x_i + dx_i]$ и объёмом многомерного параллелепипеда, образованного этими бесконечно малыми интервалами. Математически получаем следующее соотношение:

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot dx_1 \cdot \dots \cdot dx_n = P\{x_i \leqslant X_i \leqslant x_i + d_{xi};\ i = 1, 2, \dots, n\}.$$

Условное распределение случайной величины

По аналогии с понятием условной вероятности введём понятие условного распределения случайной величины. Для нашего предыдущего примера вероятность того, что взятая наудачу акция имеет доходность a_i при условии, что известна её надёжность, равная 2, определяется выражением

$$P_{i2}\{d = a_i | r = 2\} = \frac{P_i\{d = a_i;\ r = 2\}}{P\{r = 2\}}.$$

Вероятность $P\{r = 2\}$ в знаменателе формулы является элементом обычного распределения случайной величины — надёжности. Интересно, что она может быть вычислена суммированием элементов второго столбца таблицы: $\sum_j p_{ij} = q_i$ — и даёт одномерное распределение этой случайной величины.

Для двух непрерывных случайных величин (X, Y) определим условную плотность вероятности выражением $p(x|y) = \frac{p(x, y)}{p_y(y)}$. Здесь функция $p_y(y)$ — одномерная плотность вероятности случайной величины y, $p_y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx$. Подставляя это выражение, получим

$$p(x|y) = \frac{p(x, y)}{\int_{-\infty}^{+\infty} p(x, y)dx}.$$

Возвращаясь к примеру с акциями, вычислим условные вероятности для надёжности класса, равного 2. $P(d = a_i | r = 2)$ (для надёжности класса 2): $p_{12} = 0{,}1/0{,}44 = 0{,}23$, $p_{22} = 0{,}32/{,}044 = 0{,}73$, $P_{32} = 0{,}02/0{,}44 = 0{,}04$.

Мы скажем, что две случайные величины независимы, если $p(y|x) = p_y(y)$, или для всех x, y $p(x, y) = p_x(x)p_y(y)$. Это определение остаётся верным и для дискретных, и для непрерывных случайных величин. Для независимых случайных величин функция плотности вероятности как функция многих переменных распадается на произведение функций одной переменной.

Произвольное количество n случайных величин являются независимыми в совокупности тогда и только тогда, когда

$$P(x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}) = P_1(x_1) \cdot P_2(x_2) \cdot\ldots\cdot P_k(x_k)$$

для любого $k \in n$.

ЗАНЯТИЕ 15

- ХАРАКТЕРИСТИКИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ — МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ
- СВОЙСТВА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ

Характеристики распределения случайной величины — математическое ожидание и дисперсия

Функции распределения и функции плотности вероятности дают полную информацию о случайных величинах. Однако часто трудно оперировать такими непростыми конструкциями. Во многих вопросах достаточно ограничиться более простыми числовыми характеристиками распределения случайных величин.

Мерой центральной тенденции является математическое ожидание случайной величины.

Для дискретных случайных величин математическое ожидание определяется выражением

$$E\{X\} = \sum a_i p_i.$$

Здесь, как и ранее, обозначено как a_i значение дискретной случайной величины, p_i — вероятность, с которой принимается это значение.

Для непрерывных случайных величин сумму приходится заменять интегралом:

$$E\{X\} = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx.$$

Свойства математического ожидания (для дискретных и непрерывных случайных величин)

• Математическое ожидание детерминированной величины равно самой этой величине:

$$E\{b\} = b,$$

если b — не случайная (детерминированная) величина.

• Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий этих величин:

$$E\{X + Y\} = E\{X\} + E\{Y\}.$$

• Детерминированный множитель можно выносить за знак математического ожидания:

$$E\{bX\} = bE\{X\}.$$

Как следствие,

$$E\{aX + b\} = aE\{X\} + b.$$

• Математическое ожидание произведения случайных величин, вообще говоря, не равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$E\{XY\} \neq E\{X\}E\{Y\}.$$

Равенство возможно тогда и только тогда, когда случайные величины независимы.

• Математическое ожидание частного случайных величин, вообще говоря, не равно частному математических ожиданий этих величин, даже для независимых случайных величин:

$$E\left\{\frac{X}{Y}\right\} \neq \frac{E\{X\}}{E\{Y\}}.$$

Часть этих свойств легко доказывается непосредственно из определения математического ожидания. Оставляем доказательство читателям в виде упражнения.

По определению математическое ожидание функции от случайной величины выражается следующим образом:

$$E\{f(x)\} = \sum f(a_i)p_i$$

для дискретной случайной величины; и

$$E\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)p(x)dx$$

для непрерывной случайной величины.

Математическое ожидание характеризует «среднее» значение случайной величины, но плохо характеризует меру неопределённости её значения. При одном и том же математическом ожидании функции плотности вероятности могут быть по-разному разбросаны вокруг математического ожидания. Чем больше разброс, тем сильнее «размазана» случайная величина по своим значениям. Мерой разброса вокруг математического ожидания может служить «ширина» кривой плотности вероятности.

Обычной характеристикой разброса случайной величины является её дисперсия, определяемая по следующей формуле:

$$\mathrm{var}(X) = D(X) = E\{(X - E\{X\})^2\}.$$

Иными словами, дисперсия является математическим ожиданием квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания.

Дисперсия обладает следующими свойствами.

• Дисперсия случайной величины не может быть отрицательным числом:

$$\mathrm{var}(X) \geqslant 0.$$

• Дисперсия детерминированной величины равна нулю. Значение такой величины определено без какого-либо разброса:

$$\mathrm{var}(b) = 0.$$

• Если случайные величины X и Y независимы между собой, то дисперсия их суммы равна сумме дисперсий:

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y).$$

Занятие 16

• Характеристика совместного распределения случайных величин — ковариация и коэффициент корреляции

Когда мы рассматриваем две случайные величины одновременно, разброс одной из них может зависеть от значения другой из них. Мерой такого влияния обычно служит ковариация (в дословном переводе – совместная вариация) двух случайных величин. Ковариация между случайными величинами определяет степень статистической связи между ними. По определению, ковариация есть математическое ожидание произведения отклонений двух случайных величин от их же математических ожиданий. Вводя для ковариации двух случайных величин обозначение $\mathrm{cov}(X, Y)$, получим

$$\mathrm{cov}(X, Y) = E\{(X - E\{X\})(Y - E\{Y\})\}.$$

Тогда в общем случае дисперсия суммы двух случайных величин выражается так:

$$\mathrm{var}(X + Y) = E\{[(X + Y) - E\{X + Y\}]^2\} = E\{[(X - E\{X\}) + (Y - E\{Y\}]^2\}.$$

Будем обозначать случайные величины прописными (большими) буквами, отклонение значения случайной величины от её математического ожидания — теми же буквами, но строчными (маленькими):

$$x = X - E\{X\},\ y = Y - E\{Y\}.$$

Это даёт возможность упростить формулы. Используя эту договорённость, получим:

$$\mathrm{var}(X + Y) = E\{(x + y)^2\} = E\{x^2 + 2xy + y^2\} = E\{x^2\} + 2E\{xy) + E\{y^2\}.$$

Окончательно соотношение принимает вид

$$\mathrm{var}(X + Y) = \mathrm{var}(X) + \mathrm{var}(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y).$$

Из этой формулы видно, что дисперсия суммы равна сумме дисперсий не только для независимых случайных величин, но и для случайных величин с нулевой ковариацией.

Другие свойства дисперсий и ковариаций легко доказать самостоятельно.

$$\mathrm{var}(aX) = a^2\mathrm{var}(X),$$

где a — неслучайный сомножитель.

$$\mathrm{var}(aX + bY) = a^2\mathrm{var}(X) + 2ab\mathrm{cov}(XY) + b^2\mathrm{var}(Y).$$

Ковариация является размерной величиной. Значительно удобнее пользоваться её безразмерным аналогом — коэффициентом корреляции.

Обозначим коэффициент корреляции между случайными величинами X и Y через $\rho(X, Y) = \mathrm{corr}(X, Y)$ и определим его выражением

$$\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{var}(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{var}(Y)}}.$$

Тогда будут выполнены следующие свойства коэффициента корреляции:

1. Если ковариация двух случайных величин равна нулю: $\mathrm{cov}(X, Y) = 0$, то и их коэффициент корреляции также равен нулю: $\mathrm{corr}(X, Y) = 0$. Поэтому случайные величины с нулевой ковариацией называют некоррелированными.

2. Коэффициент корреляции не превышает по модулю единицу. $|\rho| \leqslant 1$. Доказательство этого свойства следует из неравенства Коши—Буняковского.

3. Если $\rho > 0$, говорят, что случайные величины положительно коррелируют; если $\rho < 0$ — что величины отрицательно коррелируют.

Пусть X, Y — случайные величины. Их распределение задаётся совместной функцией плотности распределения $p(x, y)$. Исходя из неё, можно рассчитать условные плотности распределения $p(x|y)$, $p(y|x)$ и одномерные (маржинальные) плотности распределения $p_x(x)$, $p_y(y)$. Через условные плотности распределения определяется условное математическое ожидание. Для непрерывной случайной величины условное математическое ожидание задаётся формулой

$$E_y(Y|X) = \int_{-\infty}^{\infty} yp(y|x)dy.$$

Этот интеграл зависит от величины случайной переменной X, т. е. условное математическое ожидание само является случайной величиной.

В ранее рассмотренном примере с акциями условное математическое ожидание доходности наудачу взятой акции при условии, что акция относится ко второму классу надёжности, равно

$$E(d|r = 2) = (8{,}5 \cdot 0{,}25 + 11{,}5 \cdot 0{,}7 + 17{,}5 \cdot 0{,}05) = 11{,}55.$$

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ЗАНЯТИЕ 17

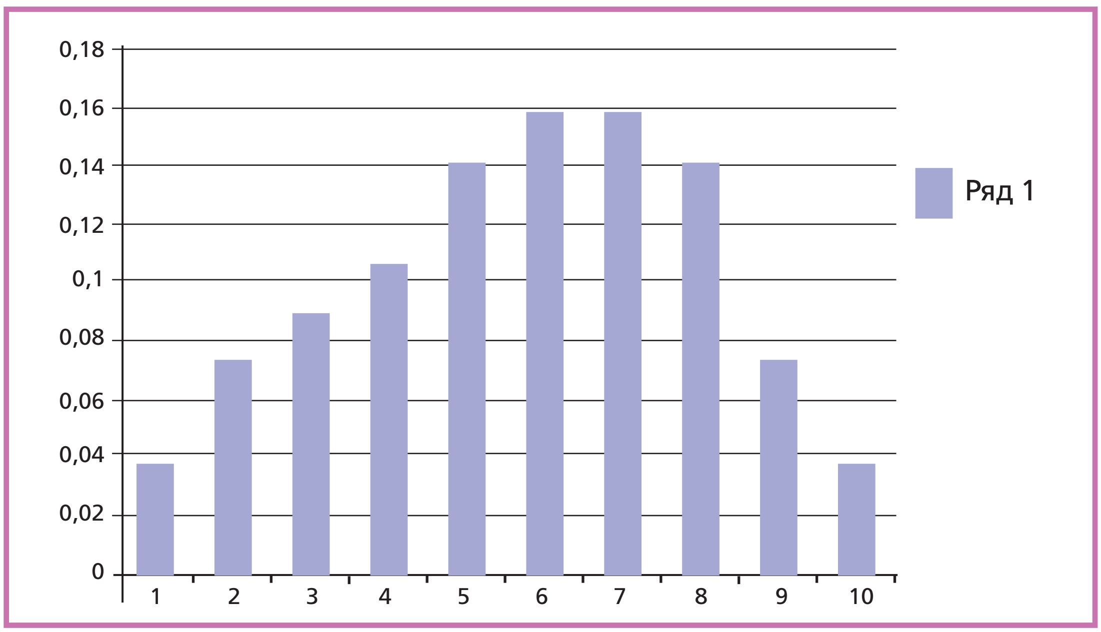
Невольно напрашивается вопрос: как эти непростые понятия и формулы теории вероятностей могут помочь нам? Ведь всё, что мы наблюдаем в мире финансов, — это цены, проценты, другие экономические величины. Нет никаких пространств элементарных событий, никаких вероятностей. Математическая статистика подсказывает не только как «организовать» случайные величины, но и как их использовать для снижения рисков в условиях неопределённости.

Прежде всего мы будем рассматривать любую численную величину как случайную с неизвестными нам вероятностными характеристиками. Например, мы знаем в некоторый момент, что кредит на два года можно получить в разных банках под несколько различающиеся годовые проценты. Мы будем полагать, что ставка процента на два года является случайной величиной. А те конкретные значения процента, которые предлагают разные банки, представляют просто некоторые из возможных значений этой случайной величины. Некоторые, но не все! Все возможные значения нам неизвестны. Мы не знаем всё пространство элементарных событий.

В математической статистике пространство элементарных событий называют *генеральной совокупностью*. А ту часть генеральной совокупности, которая нам известна, называют *выборкой из генеральной совокупности*, или просто *выборкой*. Мы хотим по этой выборке найти приближённые значения распределения всей генеральной совокупности и использовать их для принятия решений. Процедура получения приближённых неизвестных характеристик генеральной совокупности по наблюдаемым выборочным значениям называется *оцениванием*, а полученные числовые значения — *оценками*.

Пусть мы имеем выборку объёма n, т. е. наблюдаем n различных значений из всего возможного множества значений случайной величины. Например, мы собрали информацию о 98 кредитных предложениях различных банков. На самом деле таких предложений гораздо больше (генеральная совокупность!). Но нам известна только выборка. Мы будем считать, что любое из наблюдаемых значений может произойти с одинаковой вероятностью. Всего наблюдений в выборке 98, поэтому вероятность каждого значения равна $\frac{1}{98}$. Для дискретной случайной величины можно построить функцию распределения. Поскольку для её построения используются только данные из выборки, такая функция распределения называется *выборочной функцией распределения*. Мы уже отмечали, что для дискретной случайной величины функция распределения является ступенчатой функцией, возрастающей от нуля до единицы. Скачки высотой $\frac{1}{98}$ будут происходить при значениях, совпадающих с нашими выборочными наблюдениями.

Картинка получается более наглядной, если построить так называемую *гистограмму*. Для её построения весь интервал изменения величины разбивают на группы и откладывают на середине каждой группы количество наблюдений, попавших в эту группу. Типичная гистограмма имеет следующий вид:



14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

По горизонтальной оси указаны середины групп, а по вертикальной оси отложены вероятности попадания в соответствующую группу. Для наглядности изображения середины групп выбраны целыми числами. Хорошо видно, что наиболее вероятным является попадание значения случайной величины в шестую и седьмую группы.

Дадим математические определения рассмотренных понятий.

Если X — случайная величина, то выборкой объёма n из неё будем называть совокупность наблюдаемых значений этой величины $(X_1, X_2, ..., X_n)$. Эти значения будем также называть выборочными значениями.

!

Оценкой (статистикой) называется любая функция от выборочных значений и (может быть) объёма выборки, величины $f(X_1, X_2, ..., X_n; n)$. Оценка величины $f(X_1, X_2, ..., X_n; n)$ характеризует генеральную совокупность.

Например, среднее арифметическое наблюдаемых значений

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$$

называется *выборочным средним*. Выборочное среднее естественно рассматривать оценкой неизвестного математического ожидания генеральной совокупности.

Если выборочные данные распределены по группам, как на приведённой выше гистограмме, то разумной оценкой математического ожидания будет взвешенная сумма

$$\frac{\sum n_i a_i}{\sum n_i}.$$

Здесь n_i — число наблюдений, попавших в интервал с номером i, а a_i — середины этих интервалов. Суммирование распространяется на все интервалы, а не на отдельные наблюдения. Обозначим через $w_i = \dfrac{n_i}{\sum n_i}$ долю наблюдений, попавших в интервал с номером i. Тогда оценка математического ожидания принимает простой вид $\sum w_i a_i$.

Мы видим, что это выражение является обычной формулой для математического ожидания некой дискретной случайной величины, если возможные значения этой величины — середины интервалов a_i, а веса w_i —

доли попадания в эти интервалы (выполняют роль вероятностей). Для гистограммы, приведённой на рисунке, расчёт по этой формуле даёт число 0,572 в качестве оценки математического ожидания генеральной совокупности.

Для оценки дисперсии генеральной совокупности обычно используют статистику:

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Здесь n – общее число наблюдений без группировки. Во многих финансовых применениях именно оценка статистики и s^2 принимается в качестве меры риска, связанного с неопределённостью значений случайной величины.

Корень квадратный из этой оценки дисперсии называют *стандартной ошибкой*:

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2}.$$

Статистику $\frac{s}{\overline{X}}$ называют *коэффициентом вариации*. Конечно, для нулевого выборочного среднего коэффициент вариации смысла не имеет.

Для оценки дисперсии генеральной совокупности также применяют несколько иную формулу с другим делителем:

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2.$$

Эту оценку называют *выборочной дисперсией*. Понятно, что при большом числе наблюдений разница в результатах расчёта по двум этим формулам будет очень малой. Теоретически предпочитают использовать оценку s^2, на практике же часто считают выборочную дисперсию.

Для данных, сгруппированных в интервалы, получаем в ранее введённых обозначениях

$$s^2 = \frac{1}{\sum n_{i-1}}\sum\left(n_i a_i - \overline{X}\right)^2.$$

Группировка по интервалам имеет смысл только при большом числе наблюдений. Тогда проще и нагляднее использовать выражение для выборочной дисперсии

$$S^2 = \frac{1}{\sum n_i}\sum\left(n_i a_i - \overline{X}\right)^2.$$

Простыми преобразованиями это выражение упрощается до вида

$$S^2 = \sum w_i a_i^2 - \sum\left(w_i a_i\right)^2.$$

Для приведённого на гистограмме примера расчёт по формуле даёт оценку дисперсии 5,18. Стандартная ошибка будет равна корню квадратному из оценки дисперсии и составит 2,28. Коэффициент вариации равен 0,40.

Свойства статистических оценок

Занятие 18

Оценка характеристики генеральной совокупности может быть хорошей или плохой. Обычно хотят, чтобы оценка обладала некоторыми хорошими свойствами. Выделяют следующие свойства оценок:

Линейность. Это чисто математическое свойство, которое заключается в том, что оценка представляется в виде взвешенной суммы выборочных значений.

Примером служит выборочное среднее $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$. Ещё одним примером линейной оценки является функция $\sum \alpha_i X_i$, где α_i — любые неотрицательные числа.

Важным свойством оценки является её **несмещённость**. Оценка некоторого параметра $\tilde{\theta}$ называется несмещённой, если математическое ожидание оценки равно оцениваемому параметру, т. е. $E\{\tilde{\theta}\} = \theta$.

Рассмотрим торговлю акциями на российской бирже. Каждая акция характеризуется отношением цены к доходности: $\frac{P}{E}$. Случайным образом выберем 50 акций и для них посчитаем среднее соотношение $\frac{P}{E}$. Получим оценку параметра $\tilde{\theta}$. Для каждой случайной выборки в 50 элементов получим своё численное значение как оценку неизвестного математического ожидания генеральной совокупности. Свойство несмещённости основано на том, что при многократной повторяемости выборки одного и того же размера среднее значение оценок равно «истинному» значению параметра. Выборка случайна в том смысле, что каждое наблюдение не зависит от предыдущих и последующих наблюдений.

Покажем, что выборочное среднее является несмещённой оценкой математического ожидания генеральной совокупности:

$$\tilde{\theta}=\frac{1}{n}\sum X_i; \quad E\left\{\frac{1}{n}\sum X_i\right\}=\frac{1}{n}\sum E\{X_i\}=\frac{1}{n}\sum \theta=\theta.$$

Поэтому $\tilde{\theta}$ — несмещённая оценка неизвестного математического ожидания. Единственная ли это несмещённая оценка математического ожидания?

Рассмотрим следующий пример. Пусть $\tilde{\theta}=\sum \alpha_i x_i$, где α_i — любые неотрицательные числа, такие, что $\sum \alpha_i = 1$. Найдём математическое ожидание этой оценки:

$$E\{\tilde{\theta}\}=E\left\{\sum \alpha_i X_i\right\}=\sum \alpha_i E\{x_i\}=\theta\sum \alpha_i=\theta,$$

т. е. $\tilde{\theta}=\sum \alpha_i x_i$ тоже несмещённая оценка математического ожидания. Существуют и другие несмещённые оценки математического ожидания. Если оценка несмещённая, то, много раз повторяя измерение, мы получим числовую оценку, которая близка к тому, что мы оцениваем.

Среди всех возможных несмещённых оценок предпочтительной выглядит та, у которой самая маленькая дисперсия. Несмещённая оценка называется эффективной, если её дисперсия меньше дисперсии любой другой несмещённой оценки. Продолжим рассмотрение примера с несмещённой оценкой $\tilde{\theta}=\sum \alpha_i x_i$. Можно показать, что эта оценка будет эффективной при выборе весовых коэффициентов, равных друг другу. Другими словами, минимум дисперсии достигается, если $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=\frac{1}{n}$. Выборочное среднее является эффективной оценкой математического ожидания. Именно поэтому мы отдаём предпочтение этой оценке.

Другим желаемым свойством оценки является её **поведение при увеличении объёма выборки**. Когда выборка стремится к генеральной совокупности, хорошая оценка должна стремиться к характеристике генеральной совокупности.

Мы назовём оценку состоятельной, если при неограниченном росте объёма выборки вероятность отклонения оценки от оцениваемого параметра становится сколь угодно малой. Только для состоятельных оценок мы можем быть уверены, что увеличение числа наблюдений ведёт к повышению точности оценки.

Замечательный российский экономист и статистик Евгений Евгеньевич Слуцкий доказал, что сумма, разность, произведение и частное состоятельных оценок сами являются состоятельными. Этот результат получил название теоремы Слуцкого. Она позволяет аналитически разбираться со многими случаями, когда невозможно рассчитать математическое ожидание.

Можно доказать, что оценка $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ является несмещённой, а оценка $S^2 = \frac{1}{n}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ является смещённой оценкой дисперсии генеральной совокупности. Но обе оценки являются состоятельными, а смещение оценки делителем S^2 стремится к 0 при $n \to \infty$. Поэтому при достаточно большом числе наблюдений обе оценки дают практически равноценный результат.

Теперь понятны наши действия в ситуации, когда нам нужно рассчитать текущую стоимость будущих денежных потоков. Если инвестор осторожный, его показатель дисконтирования будет базироваться на действующих в экономике в это время доходностях. Например, инвестор может собрать информацию о ставках процента, предлагаемых несколькими десятками банков. Рассчитав выборочное среднее, инвестор получит оценку коэффициента дисконтирования. Очень важно рассчитать также и выборочную дисперсию. Она показывает, велик ли разброс ставок. Если все ставки близки друг к другу, то выборочная дисперсия мала. Это понимается как низкий риск. В ситуации низкого риска не самый удачный выбор показателя дисконтирования не столь опасен. Если же разброс показателей высок, то риск весьма велик. Выбор инвестора будет в значительной степени определяться его психологией. Одни инвесторы будут ориентироваться на наибольшие ставки в этот момент. Такой инвестор называется склонным к риску. Он желает вложить свои деньги в доходный проект, не считаясь с риском. Избегающий риска инвестор предпочтёт меньшую доходность, его оценка показателя дисконтирования будет близка к средней, но может быть и меньше средней.

Занятия 19·20

• Статистические выводы

После того как инвестор построил оценки интересующих его параметров или величин, ему нужно сделать какие-то выводы из полученных оценок. Например, оценка доходности одного инвестиционного проекта оказалась выше, чем оценка доходности другого. Но инвестор понимает, что полученные доходности — не точные характеристики, а всего лишь реализации случайных величин и превышение одной оценки над другой может быть просто случайностью. В этих условиях важно научиться делать выводы.

!

Выводы в условиях неопределённости принято называть *статистическими выводами*.

При статистических выводах утверждения о численных соотношениях между параметрами случайных величин принято называть *гипотезами*. Например, гипотезой будет утверждение, что доходность акции равна 13%, или утверждение, что доходность акции *A* выше, чем доходность акции *B*.

Классическая процедура проверки статистических гипотез была предложена в начале XX века Нейманом и Пирсоном. Этот подход предполагает, что всегда будут высказаны два альтернативных суждения.

Их принято называть *основной* (или *нулевой*) *гипотезой* и *альтернативной гипотезой*.

Рассмотрим следующий пример. Пусть имеется случайная выборка из значений случайной величины X_1, X_2, ..., X_n с математическим ожиданием μ и выборочное среднее этой выборки $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i=13{,}735$. Это значение является оценкой неизвестного нам математического ожидания μ этой случайной величины. Мы хотим проверить гипотезу, что математическое ожидание равно 13. Мы понимаем, что рассчитанное значение 13,735 может быть реализацией случайной величины с математическим ожиданием 13, но может наблюдаться и при любом другом значении математического ожидания.

Пусть основной гипотезой выбрана гипотеза, что математическое ожидание равно 13, а альтернативной — что математическое ожидание равно 15. Принято обозначать проверяемые гипотезы H_0 и H_1, соответственно.

$$H_0\colon \mu=12.$$
$$H_1\colon \mu=15.$$

По процедуре Неймана—Пирсона для того, чтобы решить, какой из гипотез отдать предпочтение, нужно выбрать некое числовое множество, называемое критическим. Правило статистического вывода будет следующим: если значение нашей статистики (13,735) попадёт в это критическое множество, то отдадим предпочтение альтернативной гипотезе. Другими, более точными словами мы *отвергнем* основную гипотезу в пользу альтернативной. А если значение статистики не попадёт в это множество, то мы отдадим предпочтение основной гипотезе. Более точно — в этом случае мы *не отвергаем* нулевую гипотезу. Процедуру называют также *статистическим тестом*.

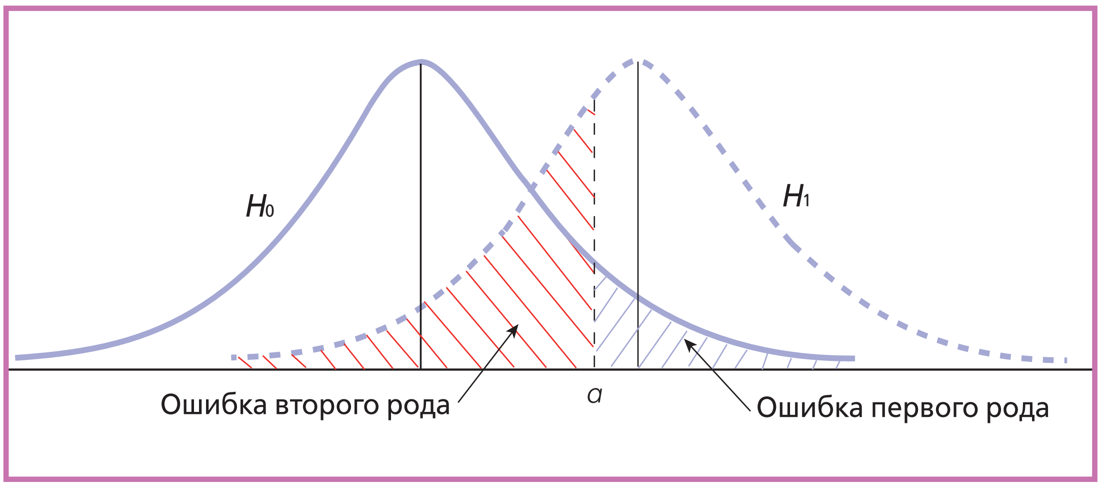
Если обозначить через S критическое множество, то при $\overline{X}\notin S$ гипотеза H_0 не отвергается, а при $\overline{X}\in S$ гипотеза H_0 принимается. Как же выбрать это критическое множество? Желательно при этом не ошибаться, но мы уже упоминали, что полученное значение статистики может произойти и в том случае, когда верна основная гипотеза, и в том, когда верна альтернативная. Но с разными вероятностями!

Хотелось бы, чтобы вероятность отвергнуть основную гипотезу, если она на самом деле верна, $P\left\{\overline{X}\in S|H_0\right\}$, была мала, в идеале равна нулю. А также чтобы мала была вероятность не отвергнуть основную гипотезу, если верна альтернативная. Или чтобы вероятность $P\left\{\overline{X}\in S|H_1\right\}$ была велика. Можно ли выбрать S так, чтобы $P\left\{\overline{X}\in S|H_0\right\}$ = 0? Это возможно в одном случае, когда S является пустым множеством (не содержит ни одного элемента). Но тогда и вся процедура лишается смысла.

$P\{\overline{X} \in S | H_0\}$ — вероятность отвергнуть верную гипотезу — называется ошибкой первого рода. Вероятность $P\{\overline{X} \notin S | H_1\}$ называется ошибкой второго рода. Это вероятность не отвергнуть основную гипотезу, когда на самом деле верна альтернативная. Величина $P\{\overline{X} \in S | H_1\} = 1 - P\{\overline{X} \notin S | H_1\}$ носит название *статистической мощности теста*. Хотелось бы так выбрать *S*, чтобы были минимальны обе ошибки — первого и второго рода — одновременно. На примере рассмотрим, почему достичь этого невозможно.

Пусть мы знаем, что случайная величина *X* имеет нормальное распределение с неизвестным математическим ожиданием, но с известной дисперсией σ^2. Математически это предположение можно записать следующим образом: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. Тогда выборочное среднее будет, как мы уже рассматривали, нормально распределённой случайной величиной с тем же математическим ожиданием и меньшей дисперсией. Или $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$. Вспомним, что основная гипотеза выглядит как H_0: $\mu = 13$, а альтернативная — H_1: $\mu = 15$.

Как выбрать критическое множество *S* в соответствии с подходом Пирсона? Если $\overline{X} < 13$, то, очевидно, мы отдадим предпочтение гипотезе H_0, а если $\overline{X} > 15$, то предпочтение следует отдать гипотезе H_1. Поэтому критическое множество выглядит как числовой интервал $(a, +\infty)$, где a — некоторое число между 12 и 15. Соответствующее решающее правило выглядит следующим образом: если $\overline{X}$ попадёт в интервал $(a, +\infty)$, то отдаём предпочтение гипотезе H_1, а если $\overline{X}$ попадёт в интервал $(-\infty, a)$ — гипотезе H_0.



На рисунке обозначены графики двух нормальных плотностей распределения. Кривая слева соответствует основной гипотезе, кривая справа — альтернативной. Ошибка первого рода α соответствует площади правого криволинейного треугольника под левой кривой. Правая вершина треугольника уходит в бесконечность, а левая граница треугольника проходит по значению a. Ошибка второго рода β соответствует площади левого криволинейного треугольника под правой кривой. При изменении числа a одна из ошибок растёт, а другая уменьшается. Поэтому невозможно выбрать границу критического множества так, чтобы минимизировать обе ошибки. Получается, нужно найти компромисс между ошибками.

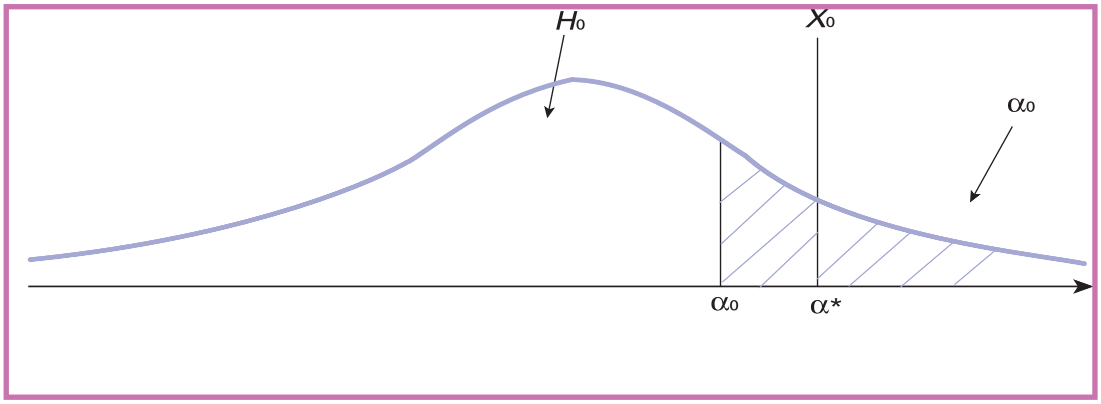
Пирсон предложил ограничить ошибку первого рода некоторой величиной и минимизировать ошибку второго рода, т. е. сначала выбрать некоторое число α_0 так, чтобы $P\left\{\overline{X} \in S \middle| H_0\right\} \leqslant \alpha_0$, и затем S выбирать так, чтобы $P\left\{\overline{X} \notin S \middle| H_1\right\} \to \min$. В этом случае говорят, что гипотеза проверяется на *уровне значимости* α_0 (level of significance). Обычно α_0 выбирают 1, 5 или 10%.

Пусть мы выбрали уровень значимости так, чтобы ошибка первого рода α не превышала 5%. Тогда надо найти точку на отрезке [13,15] так, чтобы площадь правого хвоста под кривой плотности распределения, соответствующей гипотезе H_0, была меньше или равна 0,05. Из всех точек в полученном хвосте надо выбрать ту, которая даёт минимум ошибки второго рода. Очевидно, что искомым ответом будет именно та точка, при которой площадь треугольника точно равна выбранному уровню значимости.

Для многих функций плотностей распределения рассчитаны критические значения в зависимости от выбранного уровня значимости. Рассчитанные значения сведены в специальные статистические таблицы. Алгоритмы расчёта табличных значений заложены в специальные статистические программные комплексы. Для проверки статистической гипотезы мы должны выбрать уровень значимости α_0, рассчитать значение оценки, по таблице найти критическое значение и посмотреть, попало ли значение оценки в критическое множество или нет.

Величина $(1 - \beta)$, напомним, называется мощностью критерия, чем она больше, тем лучше. Равномощные критерии: какова бы ни была альтернативная гипотеза, получим одно и то же критическое множество.

Если мы хотим проверить нулевую гипотезу на другом уровне значимости $\alpha_1 < \alpha_0$, то граница критического множества сместится вправо. Если мы отвергаем гипотезу на уровне значимости α_1, то на уровне значимости α_0 мы её тем более отвергнем.



Допустим, что рассчитанное значение статистики составило X_0. На каких уровнях значимости мы можем отвергнуть нулевую гипотезу, а на каких нет? Существует уровень значимости, при котором граница критического множества точно попадает на X_0, обозначим её α^*. Тогда при любых уровнях значимости $\alpha > \alpha^*$ мы отвергаем нулевую гипотезу, а при $\alpha < \alpha^*$ — не отвергаем. Это критическое значение уровня значимости получило название p-value. Например: P-value = 0,012: на уровне 5% отвергаем, на меньшем нет.

• РАСПРЕДЕЛЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С НОРМАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

ЗАНЯТИЯ 21·22

Вспомним, что плотность распределения нормальной (гауссовой) случайной величины со средним μ и дисперсией σ^2 описывается функцией

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Графически функция нормальной плотности представлена на рисунке 1.

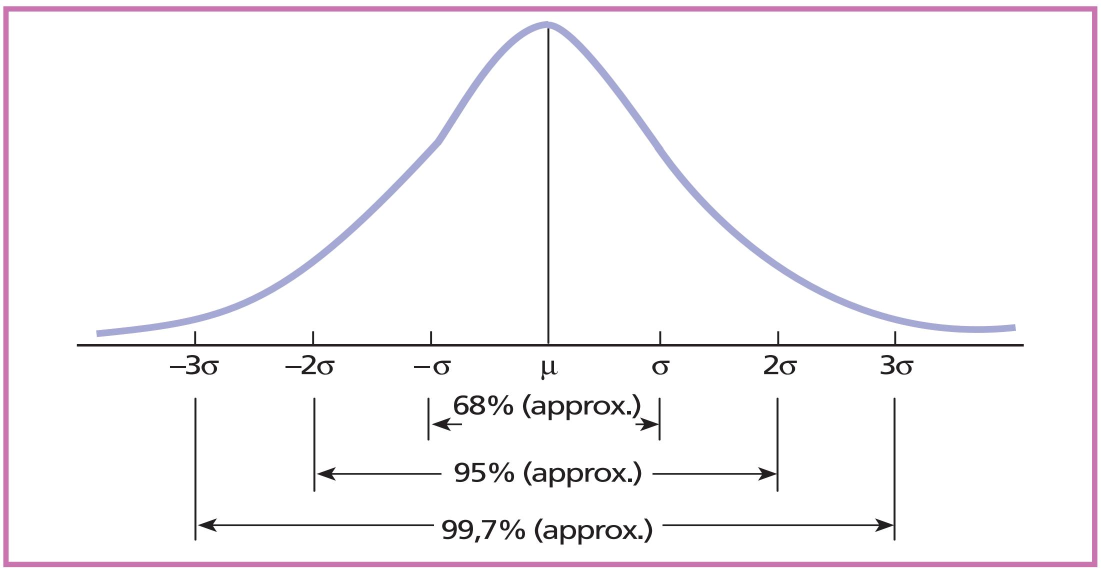


Рис. 1. **Нормальное распределение**

Таким образом, пик плотности нормального распределения приходится на математическое ожидание случайной величины (μ), а также выполняются следующие свойства: вероятность того, что случайная величина окажется в интервале $(\mu-\sigma, \mu+\sigma)$, составляет примерно 68%, аналогичные вероятности можно найти и для других интервалов (наиболее важные из них представлены на рисунке). Интересно также отметить, что функция плотности распределения меняет свою выпуклость на вогнутость в точках $\mu-\sigma, \mu+\sigma$.

Важно отметить, что только в классе нормальных величин нулевая ковариация между ними соответствует статистической независимости (в общем случае статистически зависимые случайные величины могут иметь нулевую ковариацию).

Нормальную случайную величину с нулевым средним и единичной дисперсией называют стандартной нормальной случайной величиной. Любую нормальную величину можно привести к стандартному виду через преобразование: $Y=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$. Плотность распределения стандартной нормальной случайной величины: $f(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{y^2}{2}\right)$.

С нормальным распределением тесно связаны ещё три распределения, важные для проверки статистических гипотез. Первым из них рассмотрим распределение хи-квадрат.

Распределение хи-квадрат (chi-square distribution) определяется следующим образом: $x^2(k)=\sum_{i=1}^{k}\zeta_i^2$, ξ_i *iid* $N(0,1)$. Таким образом, распределение хи-квадрат представляет собой сумму квадратов независимо распределённых стандартных нормальных величин. Число слагаемых в сумме называется *числом степеней свободы* распределения. Плотность этого распределения для некоторых степеней свободы представлена на рисунке 2.

Данное распределение обладает следующими характеристиками:

$$E(\chi^2(k)) = k, \quad \mathrm{var}\,(\chi^2(k)) = 2k.$$

При достаточно большом количестве степеней свободы распределение хи-квадрат достаточно хорошо приближается нормальным распределением:

$$\chi^2(k) \to N(k, 2k).$$

Ещё одно очень важное распределение называется распределением Стьюдента. Оно может быть выражено через уже рассмотренные нормальное распределение и распределение хи-квадрат. Распределение Стьюдента (Student’s t-distribution) определяется как частное от деления стандартной нормальной величины на корень квадратный из распределения

14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26

хи-квадрат, в свою очередь, разделённого на число степеней свободы. Причём все стандартные случайные величины, входящие в данную формулу, должны быть независимы.

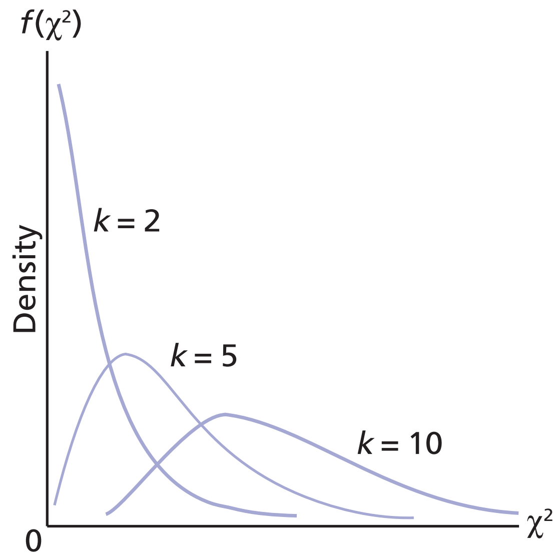


Рис. 2. **Плотность хи-квадрат распределения для разных степеней свободы**

Распределение Стьюдента симметрично, оно похоже на нормальное (а при достаточно большом количестве степеней свободы хорошо им приближается), но имеет более «толстые» хвосты, плотность распределения представлена на рисунке 3 (с. 82).

Данное распределение характеризуется следующими показателями:

$$E\left(t(k)\right)=0,\quad \operatorname{var}\left(t(k)\right)=\frac{k}{k-2}.$$

Ещё одним распределением, связанным с нормальным, является распределение Фишера.

Распределение Фишера (Fisher’s distribution) определяется следующим образом:

$$F(n,\,k)=\frac{\frac{1}{n}\chi^2(n)}{\frac{1}{k}\chi^2(k)},$$

где все участвующие стандартные нормальные величины являются независимыми.

Распределение Фишера зависит от двух параметров: числа степеней свободы числителя и числа степеней свободы знаменателя. Заметим, что $F(1,k)=t^2(k)$. Плотность распределения Фишера представлена на рисунке 4.

Данное распределение обладает следующими характеристиками:

$$E\left(F(n,k)\right)=\frac{k}{k-2}, \quad \operatorname{var}\left(F(n,k)\right)=\frac{2k^2(n+k-2)}{n(k-2)^2(k-4)}.$$

При достаточно больших значениях степеней свободы распределение Фишера хорошо приближается к нормальным.

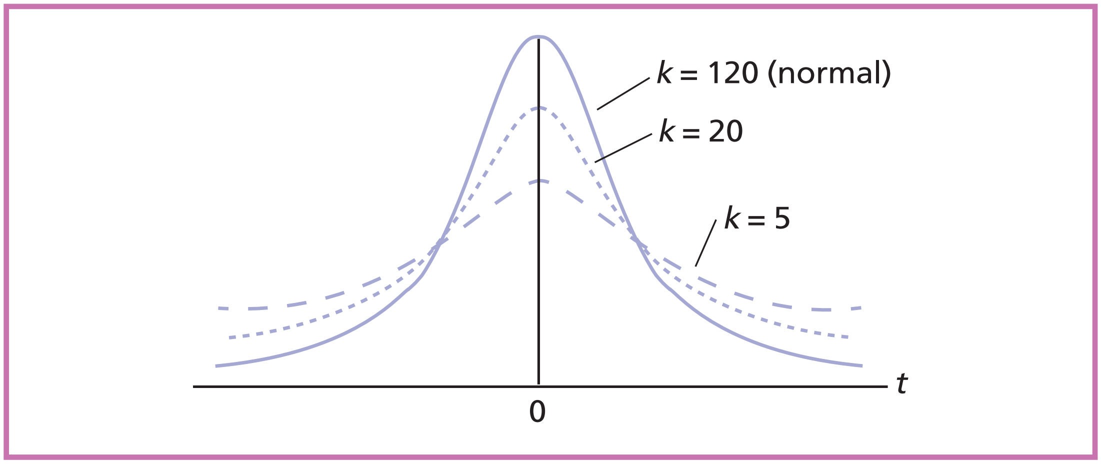


Рис. 3. **Плотность распределения Стьюдента**

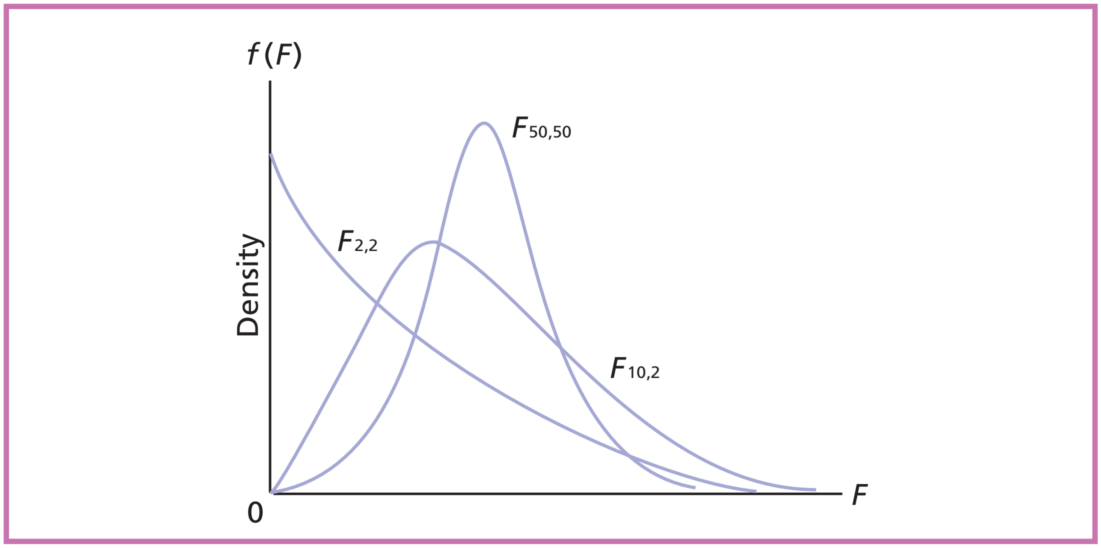


Рис. 4. **Плотность распределения Фишера для разных степеней свободы**

• ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ, БАЗИРУЮЩИХСЯ НА НОРМАЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ

ЗАНЯТИЕ 23

Рассмотрим следующий пример. Пусть $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, нормально распределённая случайная величина, а $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — случайная выборка из неё.

Мы хотим проверить гипотезу о величине неизвестного математического ожидания: H_0: $\mu = \mu_0$, H_1: $\mu \neq \mu_0$.

Рассмотрим оценку $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum X_i$, тогда $\overline{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Центрированная нормированная случайная величина $Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$ имеет стандартное нормальное распределение $N(0, 1)$. Также из курса математической статистики известно, что оценка дисперсии $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum\left(X_i - \overline{X}\right)^2$ является несмещённой и не зависит от случайной величины $\overline{X}$, и случайная величина $(n-1)\frac{S^2}{\sigma^2}$ имеет распределение хи-квадрат с $(n-1)$ степенью свободы χ^2_{n-1}.

Частное $Z / \sqrt{\frac{\chi^2_{n-1}}{n-1}}$ имеет распределение Стьюдента t_{n-1}, поскольку Z и χ^2_{n-1} независимы. Действительно,

$$\frac{\dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}}{\sqrt{(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} / (n-1)}} = \frac{\overline{X} - \mu}{S / \sqrt{n}} \sim t_{n-1}.$$

На рисунке схематически изображено распределение Стьюдента. Оно напоминает стандартное нормальное распределение, разница особенно мала при $n \geqslant 30$.

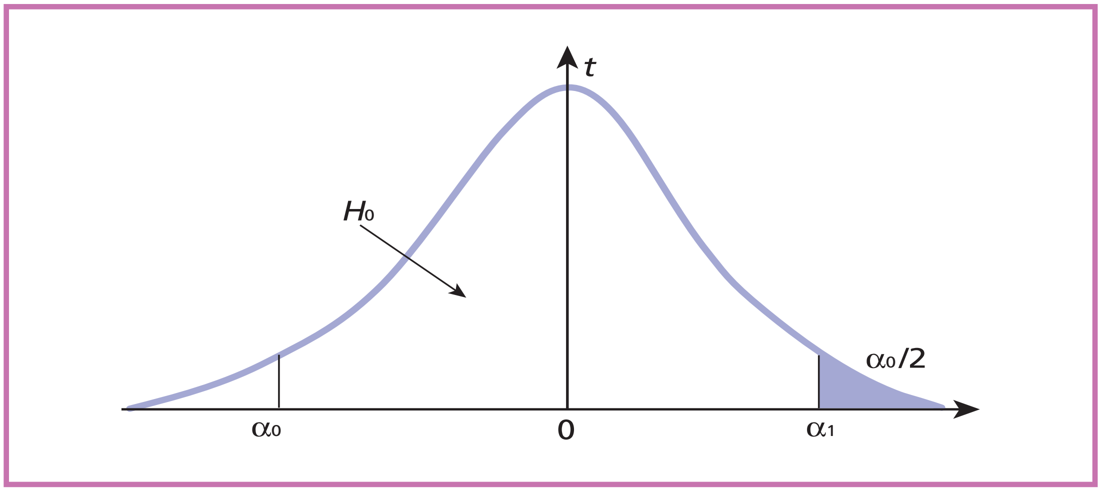


Рис. 1. **Распределение Стьюдента**

По сравнению с нормальным распределением у распределения Стьюдента хвосты «толще» и больше дисперсия — это плата за то, что мы не знаем σ.

Очевидно, что критическое множество имеет вид $(-\infty, a) \cup (a, \infty)$, поскольку мы отвергаем гипотезу H_0, когда значение статистик далеко от μ_0 (от 0 t-распределение всегда симметрично). Так как надо минимизировать ошибку второго рода β, то берём с двух сторон по $\frac{\alpha_0}{2}$. Полученное критическое значение на правом конце обозначим $t_{кр}$. Тогда справедливо соотношение $P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{кр}\right\} = \alpha$. При 30 наблюдениях и уровне значимости 5% находим по таблицам, что $t_{29,0,05}$ = 1,96. Поэтому, если $\left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right|$ > 1,96, то мы отвергаем нулевую гипотезу на уровне значимости 5%, а если меньше, то не отвергаем.

• ДОВЕРИТЕЛЬНЫЕ ИНТЕРВАЛЫ

ЗАНЯТИЕ 24

Зона неотвержения нулевой гипотезы: $\left|\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{кр}$. Преобразуем неравенство: $\overline{X}-t_{кр}S/\sqrt{n}<\mu<\overline{X}+t_{кр}S/\sqrt{n}$. Концы интервала $\overline{X}\pm t_{кр}S/\sqrt{n}$, заключающего проверяемое значение параметра μ, являются точечными оценками (статистиками). По построению $P\left(\overline{X}-t_{кр}S/\sqrt{n}<\mu<\overline{X}+t_{кр}S/\sqrt{n}\right)=1-\alpha$.

Полученный интервал называется доверительным интервалом. Концы случайны, доверительный интервал (confidence interval) — интервал со случайными концами, который накрывает неизвестный параметр с вероятностью $1 - \alpha$.

Доверительный интервал хорош, когда надо проверить несколько гипотез, например: $\mu = 12, 13, 14\ldots$

Берём 100 выборок: 95% из них будут содержать значение μ, а 5% нет.

Рассмотренный случай демонстрирует двусторонний доверительный интервал и его тесную связь с двусторонним тестом проверки статистической гипотезы H_0: $\mu = \mu_0$. Решающее правило принимает следующий вид:

$$H_0\colon \mu = \mu_0,\ H_1\colon \mu \neq \mu_0.\ \left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{n-1,\,\alpha/2} \Rightarrow \text{не отвергаем } H_0.$$

Для проверки односторонних альтернативных гипотез аналогично получаем следующие решающие правила:

$$H_0\colon \mu = \mu_0,\ H_1\colon \mu > \mu_0.\ \left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| > t_{n-1,\alpha} \Rightarrow \text{не отвергаем } H_0.$$

$$H_0\colon \mu = \mu_0,\ H_1\colon \mu < \mu_0.\ \left|\frac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}}\right| < t_{n-1,\,\alpha} \Rightarrow \text{не отвергаем } H_0.$$

Аналогично проверяются гипотезы о величине другого параметра нормального распределения — дисперсии. Мы уже отмечали, что статистика $(n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Рассмотрим основную гипотезу H_0: $\sigma^2 = \sigma_0^2$ — и двустороннюю альтернативу H_1: $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$. Тогда условие отвержения нулевой гипотезы принимает следующий вид:

$$\left[\begin{array}{l} \text{либо } (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{n-1,\,\alpha/2}\ ; \\ \text{либо } (n-1)\dfrac{S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{n-1,\,1-\alpha/2}\ . \end{array}\right.$$

ИЗМЕРЕНИЕ РИСКА И ДОХОДНОСТИ ЦЕННОЙ БУМАГИ НА ФИНАНСОВЫХ РЫНКАХ

ЗАНЯТИЕ 25

Мы уже рассматривали понятие доходности ценной бумаги. Доходность мы определили как отношение прироста стоимости бумаги к её начальной стоимости. Поскольку величина прироста может рассматриваться за различные промежутки времени, то и доходность может быть месячной, годовой и т. д. Если речь идёт о том, что по ценной бумаге выплачиваются дивиденды, то естественно рассматривать доходность за период времени между выплатами дивидендов.

Напомним, что доходность от дивидендных выплат называется текущей доходностью. Она представляет собой выраженное в процентах отношение годовых выплат дивидендов к рыночной цене акции в начале года. Полная годовая доходность акции определяется отношением суммы дивидендов и прироста рыночной цены акции к цене покупки. Обозначим цену бумаги на начало и конец периода через P_0 и P_1 соответственно. Пусть через D обозначен размер дивидендов. Тогда доходность в долях рассчитывается по формуле $R=\frac{D+(P_1-P_0)}{P_0}$. Часто доходность выражают в процентах, тогда формула для её расчёта принимает следующий вид:

$$R=\frac{D+(P_1-P_0)}{P_0}\cdot 100\%.$$

Доходность акции может быть разделена на две составляющие: на текущую доходность от дивидендных выплат $\frac{D}{P_0}$ и доходность от изменения рыночной стоимости $\frac{(P_1-P_0)}{P_0}$. Доходность от дивидендных выплат называется часто текущей доходностью. Если инвестор владеет акцией ряд лет, то среднегодовая доходность по этой акции рассчитывается как среднее арифметическое полных годовых доходностей.

При расчёте доходности инвестор точно знает только текущую стоимость ценной бумаги. Остальные составляющие формулы расчёта ещё неизвестны. Для их вычисления значений приходится использовать *ожидаемые* размеры дивидендов и *ожидаемую* рыночную цену бумаги на конец рассматриваемого периода. Чем более «приблизительно» прогнозируется цена бумаги на будущее, тем менее надёжен расчёт ожидаемой доходности.

Если стоимость ценной бумаги в конце рассматриваемого периода окажется выше, чем её ожидавшееся значение, то выше окажется и доходность инвестора. Если же бумага окажется дешевле ожидавшейся величины, то доходность окажется ниже. Не исключена ситуация, когда фактическая доходность станет отрицательной. Вместо доходности бумага принесёт убыточность. Это означает, что каждое решение инвестора сопряжено с риском. Как правило, чем выше ожидаемая доходность ценной бумаги, тем с большей неопределённостью связаны решения, связанные с её куплей/продажей. В этом случае ценная бумага называется *рисковой*. С этой точки зрения инвестор сталкивается на фондовом рынке с набором рисковых бумаг с разным риском. На фондовом рынке могут существовать и *безрисковые* бумаги, стоимость которых можно точно предвидеть. Обычно к безрисковым относятся государственные облигации, хотя в экономической истории насчитывается немало случаев, в которых то или иное государство отказывалось платить по своим обязательствам полностью или частично. Такая ситуация на финансовых рынках носит название *дефолта*.

Каждый инвестор может вкладывать средства в безрисковые активы и получать гарантированную ими доходность. Однако желание получать доходность побольше подталкивает инвестора к вложению средств в активы с большей ожидаемой доходностью, а следовательно, и с бóльшим риском. Инвестор вынужден искать компромисс между желанием получить больший доход и стремлением избежать излишнего риска. По отношению к риску инвесторы проявляют индивидуальные особенности. Одни органически не переносят риск, не представляют себе, как можно попасть в убыток или просто получить доходность меньше, чем у безрискового актива. Другие — более азартные — ради высокой доходности готовы рискнуть, надеясь, что уж им-то повезёт. При теоретическом рассмотрении инвесторов первого типа принято называть «избегающими риска» (risk-aversion). Инвесторов второго типа называют «любителями риска» или «принимающими риск» (risk lovers). При этом считается, что все инвесторы ведут себя рационально, т. е. при равном риске все инвесторы предпочтут более высокую ожидаемую доходность, а при равной ожидаемой доходности все инвесторы отдадут предпочтение меньшему риску. Свою индивидуальность инвесторы проявляют только тогда, когда не одинаковы ни риск, ни ожидаемая доходность.

Общепринятым способом описать риск и доходность на финансовых рынках является рассмотрение будущей доходности как случайной величины с некоторым законом распределения. При таком подходе характеристикой ожидаемой доходности служит математическое ожидание этой случайной величины. В ранее принятых обозначениях ожидаемая доходность имеет вид $E\{R\}$. Для упрощения записи используют и обозначение ER или одним символом μ. Характеристикой риска ценной бумаги обычно принимается дисперсия случайной величины R. Чаще всего меру риска ценной бумаги обозначают через σ^2. Другими распространёнными обозначениями являются $\mathrm{var}(R)$ и $D(R)$. Следует отметить, что существуют и применяются на практике и другие меры риска, но в рамках данного курса мы ограничимся дисперсией. Напомним, что дисперсия случайной величины характеризует её изменчивость или разброс, что на финансовых рынках получило название *волатильности* ценной бумаги.

Поскольку на финансовом рынке одновременно котируются несколько ценных бумаг, а не одна, то приходится рассматривать несколько случайных величин сразу. Каждая из ценных бумаг характеризуется своей ожидаемой доходностью (математическим ожиданием) и дисперсией (волатильностью). Но кроме того, появляются характеристики совместного изменения стоимости двух ценных бумаг. Например, если стоимость одной бумаги выросла, то *в среднем* стоимость другой бумаги может также расти, а может, в среднем, падать. Конечно, возможен вариант, что стоимость второй бумаги не зависит от стоимости первой. Опять-таки в среднем. Мы рассматривали меру такой совместной изменчивости двух случайных величин. Она называется ковариацией (совместной вариацией) двух случайных величин. Напомним, что по определению ковариация есть среднее значение произведения отклонений от среднего для каждой случайной величины. По аналогии с дисперсией чаще всего для ковариации случайных величин, обозначенных индексами 1 и 2, используется обозначение σ_{ij}. Теоретическая формула для расчёта ковариации имеет вид $\mathrm{cov}(R_i, R_j) = \sigma_{ij} = E\{(R_i - \mu_i)(R_j - \mu_j)\}$. Нормированная величина ковариации называется коэффициентом корреляции: $\mathrm{corr}(R_i, R_j) = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_i^2 \sigma_j^2}}$. Используя понятие стандартного отклонения, можно упростить формулу $\mathrm{corr}(R_i, R_j) = \dfrac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$.

Как обычно, значения математических ожиданий, дисперсий и ковариаций неизвестны. Поэтому эти важные для инвестора характеристики нужно статистически оценивать. Мы рассматривали некоторые статистические методы оценивания и самый важный вопрос — какие данные мы можем использовать для оценивания.

Всё, чем располагают инвесторы, — это значения стоимости ценных бумаг в последовательные моменты времени. Характерной особенностью фондового рынка является то, что на современных биржах сделки по купле-продаже ценных бумаг проходят с очень высокой частотой. Часто в течение очень малого промежутка времени заключается несколько сделок с ценными бумагами одного и того же эмитента. В течение торговой сессии цены сделок меняются, но мы будем их трактовать реализованными значениями одной и той же случайной величины с некоторыми математическим ожиданием и дисперсией. Поэтому за оценку математического ожидания принимается среднее значение цен сделок.

Обозначим цену акции в отдельной сделке через α_i, а общее число сделок — через N. Тогда оценка ожидаемой цены акции вычисляется по формуле $R = \frac{1}{N}\sum \alpha_i$. Мы знаем, что эта оценка обладает свойствами несмещённости и состоятельности. Часто эту же формулу рекомендуют применять и для оценки ожидаемой доходности по месячным или годовым ценам акции (или другой ценной бумаги). Но оценка сохраняет свои хорошие статистические свойства, только если данные можно рассматривать как выборку из одной и той же случайной величины. Это означает, что математическое ожидание для всех значений стоимости акции остаётся одним и тем же. Другими словами, не меняется ожидаемая цена акции, а следовательно, и ожидаемая доходность. Такая стабильная ситуация противоречит нашему пониманию фондового рынка. Поэтому для таких данных применяют более сложные методы, называемые эконометрическими. Идея таких методов заключается в том, что динамика стоимости ценной бумаги описывается математической моделью, параметрами которой являются математическое ожидание и дисперсия, а затем эти параметры оцениваются сложными эконометрическими методами. Мы не будем рассматривать эти методы оценивания в нашем курсе.

Аналогичным образом по внутридневным данным может быть оценена дисперсия по уже известной нам формуле. Для этого обычно используют статистику $s^2 = \frac{1}{N-1}\sum (P_i - \mu)^2$. Здесь N — общее число наблюдений за ценами сделок акций типа i. В финансовых применениях именно оценка s^2 принимается в качестве меры риска, связанного с неопределённостью значений случайной величины. Во многих случаях знаменатель $(N-1)$ заменяется на N.

Для оценки ковариации двух акций применяется следующая формула, являющаяся аналогом формулы для оценки дисперсии:

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{N-1}\sum(a_i - \bar{a})(b_i - \bar{b}).$$

Как и раньше, через a_i и b_i обозначены цены акций первого и второго инвесторов, их математические ожидания обозначены той же буквой, но с чёрточкой над символом. Использование выборочной ковариации в финансовых расчётах мы рассмотрим на следующем занятии.

Посмотрим конкретный (хотя и условный) пример расчета ожидаемых доходностей и рискованности двух акций, а также выборочной ковариации. В таблице приведены по 20 значений доходностей акций, обозначенных *A* и *B*.

Таблица

Доходность	
акции *A*	акции *B*
24,11846566	1,204699891
7,920975587	17,83206688
21,45404307	8,656924154
11,29528392	4,20889139
1,912653349	13,13941814
24,32342756	8,462085291
17,35609143	15,32419553
22,62778167	9,603837507
20,47310446	5,394029199
21,8638722	15,07868675
12,89151784	6,80026099
10,66407728	16,66090545
14,56767274	18,28738908
20,08331249	4,664641287
8,546406792	8,722461521
13,622405	16,03344863
22,87034794	2,273515962
7,992628494	9,994819558
23,17393948	9,072806171
10,44057875	16,33615062

Конечно, можно просчитать по этим данным средние значения вручную или на калькуляторе. Но, как уже говорилось, гораздо удобнее пользоваться электронными таблицами. В данном примере статистическая функция Excel СРЗНАЧ рассчитала ожидаемые доходности этих акций. Акция *A* характеризуется ожидаемой доходностью 15,90992929, а акция *B* — ожидаемой доходностью 10,3875617. Оценка волатильности рассчитана с помощью функции ДИСП.В. Для акции *A* дисперсия оказалась равной 45,39751142, а для акции *B* — 28,90847298. Как и обычно, более доходная акция *A* является и более рисковой. Функция КОРЕНЬ рассчитала оценки стандартных отклонений (стандартные ошибки): для акции *A* — 6,73776754, для акции *B* — 5,376660021.

Оценка ковариации этих двух акций осуществлена с помощью функции КОВАРИАЦИЯ.В, а оценка коэффициента корреляции — с помощью функции КОРРЕЛ. Эти значения в данном примере составили –16,6479 и –0,45955 соответственно. В приведённом примере акции оказались отрицательно коррелированы, т. е. увеличение доходности акции *A* соответствует в среднем уменьшению доходности акции *B* и наоборот. Как мы увидим в следующем занятии, это свойство позволяет строить менее рисковые финансовые стратегии.

ПОРТФЕЛЬНЫЙ РИСК

ЗАНЯТИЕ 26

Рассмотрим стандартную задачу: инвестор, обладающий некоторой суммой денег, хочет вложить её в ценные бумаги, обращающиеся на фондовом рынке. Мотивы такого поведения инвестора мы уже кратко рассматривали. С одной стороны, инвестор хочет, чтобы его деньги не обесценились. Ведь мы уже знаем, что даже при отсутствии инфляции та же сумма денег через какой-то промежуток времени имеет меньшую текущую стоимость. Другими словами, наличные деньги обесцениваются. Также инвестор желал бы, чтобы его деньги «прирастали», т. е. инвестор хочет заработать, покупая те или иные ценные бумаги на фондовом рынке.

Комплект ценных бумаг, приобретённых или сохраняемых инвестором, называется портфелем ценных бумаг данного инвестора, кратко — портфелем. Мы помним из предыдущего занятия, что каждой ценной бумаге на фондовом рынке присущи две характеристики: доходность и риск. Поэтому, какой бы портфель ни набрал (сформировал) инвестор, его портфель также будет характеризоваться доходностью и риском. Инвестор хотел бы иметь более высокую доходность при меньшем риске.

Предположим на время, что на фондовом рынке нет безрисковых ценных бумаг. Все бумаги на рынке рисковые. Прежде всего разберёмся, почему рациональный инвестор всегда будет приобретать несколько ценных бумаг (а может быть, и все). Почему инвестору выгодно покупать портфель, а не одну отдельную ценную бумагу?

Чётко оговорим, какие предположения о рынке и инвесторах мы сделаем для проведения нашего рассмотрения. Мы предположим, что все инвесторы имеют одинаковые ожидания о доходностях торгуемых ценных бумаг и об их рискованности, а также о ковариациях бумаг между собой. Другими словами, мы будем считать, что эти характеристики являются объективными, не зависящими от индивидуальных особенностей инвестора, в том числе от отношения инвестора к риску. Конечно, это предположение не вполне реалистично. Ведь речь идёт об ожиданиях инвесторов, а их информированность может быть различной. Например, некий инвестор может быть лично знаком с руководством фирмы-эмитента, а потому иметь лучшие прогнозы о будущем фирмы и будущей стоимости её акций. Такая информация называется *инсайдерской* (внутренней). Мы рассматриваем ситуацию, когда инсайдерской информации нет.

Мы начали это занятие с задачи инвестора распорядиться свободными деньгами. Но задачу легко расширить, допуская, что вместо денег у инвестора уже есть комплект акций и инвестор может продать какие-то из них и купить другие. Поэтому принято говорить, что инвестор обладает *активами* (в виде денег и/или ценных бумаг). Его задача — переформировать портфель, оптимальным образом изменив в нём количество акций различных эмитентов. В практической жизни, чтобы продать или купить акции, инвестор должен понести некоторые затраты. Например, заплатить комиссию продавцу или так называемому брокеру. Часто сделка по купле-продаже активов называется *транзакцией*, а издержки по купле-продаже — *транзакционными издержками.* Кроме того, с любой сделки купли-продажи участники сделки (*контрагенты*) должны платить налоги. Но мы в нашем рассмотрении будем считать, что нет ни налогов, ни транзакционных издержек.

Вернёмся к причинам, по которым инвестор вкладывает свои активы в разные акции, *диверсифицирует* свой портфель. Упростим ситуацию, рассматривая обращение на рынке только двух ценных бумаг. Назовём их бумагой A и бумагой B. Если инвестор вложит все деньги в бумагу A, то обозначим ожидаемую доходность через ER_A, а дисперсию — меру рискованности бумаги — через σ_A^2. Аналогичные характеристики для бумаги B обозначим через ER_B и σ_B^2. Рассмотрим случай, когда доходности этих бумаг отрицательно коррелированы, т. е. $\sigma_{12} < 0$. Напомним, что это означает, что в среднем рост доходности одной бумаги сопровождается снижением доходности другой. Отрицательным будет и коэффициент корреляции между этими бумагами: $\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2} < 0$. Убедимся, что если инвестор сформирует портфель из обеих ценных бумаг, то рискованность портфеля будет меньше, чем риск каждой из бумаг.

Для упрощения выкладок предположим, что ожидаемые доходности бумаг и их дисперсии равны между собой, а коэффициент корреляции равен минус единице. Что можно сказать про портфель, наполовину состоящий из бумаг *A* и наполовину из бумаг *B*? Поскольку ожидаемые доходности бумаг равны между собой, доходность портфеля будет такой же, как и у отдельных бумаг. А дисперсия? Используя выведенные свойства дисперсии суммы двух случайных величин, получим, что дисперсия такого портфеля будут равна следующему выражению: $\frac{1}{4}\left(\sigma_A^2 + \sigma_B^2 + 2\sigma_{12}\right)$. Если дисперсии бумаг равны между собой, а коэффициент корреляции равен –1, то выражение в скобках обращается в ноль. Удивительное дело, портфель становится безрисковым.

Дополнительное образование
Серия «Учимся разумному финансовому поведению»

Издание для дополнительного образования

Канторович Григорий Гельмутович

ФИНАНСОВАЯ ГРАМОТНОСТЬ

Материалы для учащихся. 10–11 классы общеобразовательных организаций
Математический профиль

Редакторы *Е. А. Вигдорчик*, *В. В. Антонов*, *Т. А. Чамаева*, *Л. М. Бахарева*
Художественный редактор *А. М. Драговой*
Художник И. В. Дедушева
Компьютерная вёрстка *Т. Е. Сонниковой*
Макет и обложка художника *А. М. Драгового*
Корректор *Е. В. Барановская*

Электронная версия разработана
НОЧУ ДПО УЦ «Сетевая Академия»