Задачи на вклады (депозиты).

Для решения задач на проценты по вкладам надо хорошо знать простые задачи на проценты и некоторые формулы сложных процентов. В задачах на проценты по вкладам речь идёт либо об однократном изменении величины вклада на определённое число процентов (простые проценты), либо о последовательном изменении величины вклада через (как правило) равные промежутки времени на определённое число процентов (сложные проценты). В последнем случае каждый раз начиная со второго проценты начисляются на сумму, полученную после предыдущего начисления процентов. Тем самым задачи на проценты по вкладам представляют собой типичные задачи на последовательное изменение некоторой величины на определённое число процентов.

Формулы простых и сложных процентов.
I. Пусть некоторая величина А увеличивается n раз (n год) и каждый раз на p%.
Вводим обозначения: Ао – первоначальное значение величины А;
p – постоянное количество процентов;
а процентная ставка: **a**=$\boldsymbol{\frac{p}{100} = 0,01p}$
A_n – накопленная сумма за n раз (к концу n-го года) - по формуле простых процентов;
Sn - накопленная сумма за n раз (к концу n-го года) - по формуле сложных процентов.
Тогда ее значение A_1 для простых процентов после первого увеличения (к концу первого года) вычисляется по формуле: $A_1 = A_0 + A_0 \cdot 0{,}01p = A_0(1 + 0{,}01p) = A_0(1 + a)$.
В конце второго этапа $A_2 = A_1 + A_0 \cdot 0{,}01p = A_0(1 + a) + A_0a = A_0(1 + 2a)$.
В конце третьего этапа $A_3 = A_2 + A_0 \cdot 0{,}01p = A_0(1 + 2a) + A_0a = A_0(1 + 3a)$.
Тогда для простых процентов сумма по годам равна:
An = $A_0(1 + 0{,}01p \cdot n)$.
Для сложных процентов это выглядит иначе:
Пусть некоторая величина So увеличивается n раз (n год) и каждый раз на p%.
Тогда ее значение S1 для сложных процентов после первого увеличения (к концу первого года) вычисляется по формуле: $S_1 = S_0 + S_0 \cdot 0{,}01p = S_0\left(1 + \frac{1}{100}p\right)$.
В конце второго этапа $S_2 = S_1 + S_1 \cdot 0{,}01p = S_0\left(1 + \frac{1}{100}p\right)^2$.
В конце третьего этапа $S_3 = S_2 + S_2 \cdot 0{,}01p = S_0\left(1 + \frac{1}{100}p\right)^2 = S_0\left(1 + \frac{1}{100}p\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = S_0\left(1 + \frac{1}{100}p\right)^3 = S_0(1 + a)^3$.
Тогда для сложных процентов сумма по годам равна:

$$\boldsymbol{S_n = S_0(1 + \frac{p}{100})^n} \quad \textbf{или}$$

$$\boldsymbol{S_n = S_0(1 + a)^n}, \ \textbf{где}$$

$\boldsymbol{S_0}$ – сумма вклада, $\boldsymbol{n}$ – количество срока(время вклада),
$\boldsymbol{S_n}$ – конечная сумма, $\boldsymbol{a}$ – процентная ставка.

Или эту формулу в некоторых пособиях пишут так:
Основная формула, по которой решаются многие задачи на вклады:

$$Sn = S\left(1 + \frac{x}{100}\right)^n$$

S— первоначальная сумма вклада, x — процент, S_n –сумма конечная, а число n — это срок вклада.

Ключевая задача №1.

За время хранения вклада в банке процент по нему начислялся ежемесячно в размере 5%, затем 8% и, наконец, $11^1/_9$ %. Известно, что под действием каждой процентной ставки вклад находился целое число месяцев. По истечению срока хранения первоначальной суммы вклад увеличился на 96%. Определите срок хранения вклада.

Решение: Пусть изначально сумма была равна S. Тогда через месяц, после начисления процентов, мы имеем: $S_1 = S\left(1+\frac{5}{100}\right)$, а через два месяца, при той же ставке: $S_2 = S\left(1+\frac{5}{100}\right)^2$, а через n месяцев $Sn = S\left(1+\frac{5}{100}\right)^n$.

Т.к. мы не знаем с какой процентной ставкой какой срок лежал вклад, то индекс n надо пронумеровать:

$$Sn = S\left(1+\frac{5}{100}\right)^{n1}\cdot\left(1+\frac{8}{100}\right)^{n2}\cdot\left(1+\frac{11\frac{1}{9}}{100}\right)^{n3} = 1{,}96S$$

После преобразования:

$$\left(\frac{105}{100}\right)^{n1}\cdot\left(\frac{108}{100}\right)^{n2}\cdot\left(\frac{1000}{900}\right)^{n3} = \frac{196}{100} \qquad \left(\frac{3\cdot 7}{4\cdot 5}\right)^{n1}\cdot\left(\frac{3^3}{5^2}\right)^{n2}\cdot\left(\frac{2\cdot 5}{3^2}\right)^{n3} = \frac{7^2}{5^2}$$

Т.к. число 7 встречается в левой части только в первой дроби, а в правой части встречается во второй степени, то $n_1 = 2$. Тогда: $\left(\frac{3^3}{5^2}\right)^{n2}\cdot\left(\frac{2\cdot 5}{3^2}\right)^{n3} = \frac{2^4}{3^2}$, откуда $n_3 = 4$ и, следовательно, $n_2 = 2$.

Ответ: 2 + 4 + 2 = 8 месяцев

Ключевая задача №2. *Владимир поместил в банк 3600 тысяч рублей под 10% годовых. В конце каждого из первых двух лет хранения после начисления процентов он дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу третьего года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 48,5%. Какую сумму Владимир ежегодно добавлял к вкладу?*

Решение.

Арифметический подход к решению.

1. 3600 · 1,485 = 5346 (т. р.) — размер вклада к концу третьего года хранения.
2. 3600 · 1,1 · 1,1 · 1,1 = 4791,6 (т. р.) — размер вклада к концу третьего года хранения, зависящего от первоначально внесенной суммы.
3. 5346 − 4791,6 = 554,4 (т. р.) составляют ежегодные дополнительно внесенные вклады, включая начисленные процентные надбавки.
4. Пусть одну часть из суммы 554,4 т. р. составляет дополнительно внесенная сумма в третий год хранения вклада вместе с процентной надбавкой, начисленной на ту же сумму. Тогда 1,1 часть составит размер дополнительно внесенной суммы во второй год хранения вклада с учетом процентной надбавки, начисленной дважды (два года подряд).
5. Всего 1+1,1 = 2,1 (части).
6. 554,4 : 2.1 = 264 (т.р.) — доля одной части от 554, 4 т. р. вместе с ежегодной процентной надбавкой.
7. 264 : 1,1 = 240 (т. р.) — сумма, ежегодно добавленная к вкладу.

Алгебраический подход к решению.

Пусть Владимир ежегодно вносил на счет x р.

К концу первого года хранения размер вклада стал $3600 \cdot 1{,}1 = 3960$ (т. р.)

Владимир дополнительно внес x р. Размер вклада стал $(3960 + x)$ т. р.

К концу второго года хранения размер вклада стал $(3960 + x) \cdot 1{,}1 = 4356 + 1{,}1x$(т. р.)

Владимир вновь сделал дополнительный взнос x т. р.

Размер вклада стал $4356 + 1{,}1x + x = 4356 + 2{,}1x$ (т. р.)

К концу года были начислены проценты на сумму $4356 + 2{,}1x$ (т.р.)

Размер вклада стал $(4356 + 2{,}1x) \cdot 1{,}1 = 4791{,}6 + 2{,}31x$ (т. р.), который равен 5346 т. р. ($3600 \cdot 1{,}485 = 5346$).

Решим уравнение: $4791{,}6 + 2{,}31x = 5346 \Leftrightarrow 2{,}31x = 554{,}4 \Leftrightarrow x = 240$.

Ответ: 240 000 рублей.

Ключевая задача №3..

Решение задач с помощью математического анализа

6.В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составляла x % годовых, тогда как в январе 2001 года — y % годовых, причем известно, что x+y=30%. В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение x при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.

*Решение:*Пусть в январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке на сумму A руб. Тогда через год при x % годовых на счету окажется сумма A (1 +) руб.

Далее вкладчик снимает со счета пятую часть первоначальной суммы. То есть на счету оказывается сумма . В банке меняется процентная ставка и составляет теперь y %, т.е (30-x)%. Тогда еще через год у вкладчика на счету окажется Нас интересует значение x, при котором значение f(x) = будет максимальным. Исследуем данную функцию методами математического анализа.

f′(x)=0 при

или Максимальное значение функция f(x) примет в точке x_0 (вершина параболы), то есть в точке =25.

Ответ: 25%.

V. Задачи на сравнение.

.В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена баррели сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти?

Решение:

1 сентября	руководство края положило A рублей под 26% в месяц	цена баррели сырой нефти уменьша 10% ежемесячно
1 октября	сумма составит A(1+0,26) руб	Вложенная сумма уменьшится и станет A(1-0,1)руб
1 ноября	$A(1+0{,}26)^2$ руб.	станет $A(1-0{,}1)^2$ руб

Тогда сумма увеличится в $\frac{1{,}26 \cdot 1{,}26}{0{,}9 \cdot 0{,}9}$=1,96 , т.е. на 96%

Ответ: на 96%. Задачи с экономическим содержанием являются практическими задачами. А их решение, бесспорно, способствует более качественному усвоению содержания курса математики средней школы, позволяет осуществлять перенос полученных знаний и умений в экономику, что в свою очередь, активизирует интерес к задачам прикладного характера и изучению математики в целом. Такие задачи позволяют наиболее полно реализовывать прикладную направленность в обучении и способствуют более качественному усвоению самого учебного материала и формированию умения решать задачи данного типа.		
№1	За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, $12{,}5\%$ в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$. Определите срок хранения вклада.	Ключевая задача №1. Ответ.7.
№2	В банк был положен вклад под банковский процент 10%. Через год хозяин вклада снял со счета 2000 рублей, а еще через год снова внес 2000 рублей. Однако, вследствие этих действий через три года со времени первоначального вложения вклада он получил сумму меньше запланированной (если бы не было промежуточных операций со вкладом). На сколько рублей меньше запланированной суммы получил в итоге вкладчик?	Ключевая задача №1. Ответ: на 220 р.
№3	Близнецы Саша и Паша положили в банк по 50 000 рублей на три года под 10% годовых Однако через год и Саша, и Паша сняли со своих счетов соответственно 10% и 20% имеющихся денег. Еще через год каждый из них снял со своего счета соответственно 20 000 рублей и 15 000 рублей. У кого из братьев к концу третьего года на счету окажется большая сумма денег? На сколько рублей?	Ключевая задача №1. Ответ: у Саши, на 1155 рублей.
№4	В банк помещена сумма 3900 тысяч рублей под 50% годовых. В конце каждого из первых четырех лет хранения после начисления процентов вкладчик дополнительно вносил на счет одну и ту же фиксированную сумму. К концу пятого года после начисления процентов оказалось, что размер вклада увеличился по сравнению с первоначальным на 725%. Какую сумму вкладчик ежегодно добавлял к вкладу?	Ключевая задача №2. Ответ: 210 000.
№5	Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов (то есть увеличил ставку a% до (a + 40)%). К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков процент новых годовых?	Ответ: 60.
№6	Некоторая сумма, больше 1000 рублей, была помещена в банк, и после первого года хранения проценты, начисленные на вклад, составили 400 рублей. Владелец вклада добавил на счет 600 рублей. После второго года хранения и начисления процентов сумма на вкладе стала равна 5500 рублей. Какова была первоначальная сумма вклада, если процентная ставка банка для первого и второго	Ответ: 4000.

	года хранения была одинакова?	
№7	В январе 2000 года ставка по депозитам в банке «Возрождение» составляла х % годовых, тогда как в январе 2001 года — у % годовых, причем известно, что х+у=30%. В январе 2000 года вкладчик открыл счет в банке «Возрождение», положив на него некоторую сумму. В январе 2001 года, по прошествии года с того момента, вкладчик снял со счета пятую часть этой суммы. Укажите значение х при котором сумма на счету вкладчика в январе 2002 года станет максимально возможной.	Ответ: 25%.
№8	За время хранения вклада в банке проценты по нему начислялись ежемесячно сначала в размере 5%, затем 12%, потом $11\frac{1}{9}\%$ и, наконец, $12,5\%$ в месяц. Известно, что под действием каждой новой процентной ставки вклад находился целое число месяцев, а по истечении срока хранения первоначальная сумма вклада увеличилась на $104\frac{1}{6}\%$ Определите срок хранения вклада.	

Задачи для самостоятельной работы.

1. Баба Валя, накопив часть своей пенсии, решила улучшить свое материальное положение. Она узнала, что в Спёрбанке от пенсионеров принимают вклады под определенный процент годовых и на этих условиях внесла свои сбережения в ближайшее отделение Спёрбанка. Но через некоторое время соседка ей рассказала, что недалеко от той местности, где проживают пенсионеры, есть коммерческий банк, в котором процент годовых для пенсионеров-вкладчиков в 20 раз выше, чем в Спёрбанке. Баба Валя не доверяла коммерческим банкам, но стремление улучшить свое материальное положение взяло верх. После долгих колебаний и ровно через год после открытия счета в Спёрбанке Баба Валя сняла половину образовавшей суммы от ее вклада, заявив: «Такой навар меня не устраивает!» И открыла счет в том коммерческом банке, о котором говорила ее соседка, не теряя надежды на значительное улучшение своего материального благосостояния. Надежды оправдались: через год сумма Бабы Вали в коммерческом банке превысила ее первоначальные кровные сбережения на 65%. Сожалела Баба Валя, что год назад в Спёрбанке сняла не всю сумму, а лишь половину, однако, подумала: «А где же мы не теряли?..». Гендиректор коммерческого банка оказался хорошим: не оставил Бабу Валю без навара! А каков в Спёрбанке процент годовых для пенсионеров? Ответ.10.
2. Два брокера купили акции одного достоинства на сумму 3640 р. Когда цена на эти акции возросла, они продали часть акций на сумму 3927 р. Первый брокер продал 75% своих акций, а второй 80% своих. При этом сумма от продажи акций, полученная вторым брокером, на 140% превысила сумму, полученную первым брокером. На сколько процентов возросла цена одной акции?
Ответ: 37,5.
3. Цена некоторого товара была повышена сначала на 10%, затем еще на 120 рублей и, наконец, еще на 5%. Какова была первоначальная цена товара, если в результате повышение составило 31,25%? Ответ.800.
4. В конце августа 2001 года администрация Приморского края располагала некой суммой денег, которую предполагалось направить на пополнение

нефтяных запасов края. Надеясь на изменение конъюнктуры рынка, руководство края, отсрочив закупку нефти, положила эту сумму 1 сентября 2001 года в банк. Далее известно, что сумма вклада в банке увеличивалась первого числа каждого месяца на 26% по отношению к сумме на первое число предыдущего месяца, а цена баррели сырой нефти убывала на 10% ежемесячно. На сколько процентов больше (от первоначального объема закупок) руководство края смогло пополнить нефтяные запасы края, сняв 1 ноября 2001 года всю сумму, полученную из банка вместе с процентами, и направив ее на закупку нефти? Ответ: на 96%.

5. Вариант №181. Ларин.

   Гражданин положил 1 млн рублей в банк на 4 года. В конце каждого год а на лежащую сумму начисляется 10%. Он решил в конце каждого из трех первых лет (после начисления процентов) снимать одинаковую сумму денег Эта сумма должна быть такой, чтобы после 4- лет после начисления процентов за 4- год у него на счету было не менее 1200 тыс рублей. Какую максимальную сумму может снимать гражданин. Ответ округлить до целой тысячи в меньшую сторону. Ответ.72.

Литература.

1. С.А. Шестаков. Задачи с экономическим содержанием. Москва. Издательство МЦНМО, 2017г.
2. Д.Д.Гущин. Встречи с финансовой математикой. Санкт-Петербург. 2016.
3. Сайт Александра Ларина http://alexlarin.net/ege16.html.
4. Сайт Д.Д. Гущина https://ege.sdamgia.ru/
5. Сайт. http://4ege.ru/matematika.
6. Сайт Павла Бердова https://www.berdov.com/